# **Les Nombres Surréels**,

ou comment deux anciens étudiants découvrirent les mathématiques pures et vécurent heureux
Une romance mathématique de D. E. Knuth

Traduction : Daniel E. Loeb et Hélène Loeb[1]
Auteur : Donald E. Knuth[2]



[1]Université de Bordeaux I, URA CNRS 1304
[2]Stanford University

Ce livre a été mis en page grâce à LaTeX. La couverture et les illustrations sont due à Jill C. Knuth.

# Contents

# 1 La Pierre

**A** : Bill, est-ce que tu penses que tu t'es trouvé ?

**B** : Quoi ?

**A** : Je veux dire... nous voilà au fin fond de l'océan indien, à des lieues de toute civilisation. Ça fait maintenant des mois qu'on est parti pour éviter d'être pris par le système, pour nous "trouver". Je me demande seulement si tu penses qu'on a réussi.

**B** : A vrai dire, Alice, moi aussi je me suis posé la question. Ces derniers mois avec toi ont vraiment été super. On est complètement libre, on se connaît vraiment. On n'est plus des machines mais vraiment des personnes. . .

Mais. . . ces temps-ci, j'ai le sentiment bizarre que certaines choses que l'on voulait fuir me manquent. Tu comprends, j'ai cette envie irrésistible de lire un livre, *n'importe quel* livre, même un bouquin de cours, même de maths ! Ça a l'air idiot, mais je suis là à ne rien faire et j'aurais tellement aimé avoir des mots-croisés.

**A** : Non. . . pas des mots-croisés quand-même ! C'est ce que tes *parents* font tout le temps ! Mais, je comprends ce que tu veux dire, on a besoin de faire travailler nos méninges. Ça me rappelle la fin des vacances quand on était gosses. Chaque année en juin, on comptait les jours pour finir l'année, mais début septembre, on était bien content de retourner en classe.

**B** : Bien sûr, quand on vit d'amour et d'eau fraîche comme nous, les jours ne sont pas si pénibles. Mais je crois que le truc le plus important que j'ai découvert ici, c'est que cette vie là ne me suffit pas. J'ai besoin de me casser la tête sur quelque chose de pas trop simple.

**A** : Je suis vraiment désolée d'être trop simple pour toi. Tu ne veux pas aller faire un tour sur la plage ? On trouvera peut-être des galets ou quelque chose pour fabriquer un jeu.

**B** : (SE LEVANT) Bonne idée. Mais d'abord, j'ai bien envie de piquer un petit sprint dans l'eau.

**A** : (COURANT VERS L'EAU) Moi aussi ! Je parie que tu ne me rattrapes pas !

**B** : (APERÇEVANT UN GROS ROCHER NOIR À MOITIÉ ENTERRÉ DANS LE SABLE) Eh ! C'est quoi ça ?

**A** : Je ne sais pas. Je n'ai jamais rien vu de pareil. Regarde, il y a des graffiti derrière.

**B :** Voyons, tu peux m'aider à le déterrer ? Ça ressemble à une pièce de musée. Ouille ! C'est lourd ! Les inscriptions doivent être en arabe ancien… Non, attends je crois que c'est de l'hébreu. Tournons le de ce côté.

**A :** De l'hébreu, tu es sûr ?

**B :** J'ai fait beaucoup d'hébreu quand j'étais jeune. Et je peux presque comprendre.

**A :** Je sais qu'il n'y a jamais vraiment eu de fouilles par ici. On a peut-être découvert une autre "Pierre de Rosette". Qu'est-ce qu'il y a écrit, tu arrives à lire ?

**B :** Attends un peu… Ici en haut à droite, c'est là que ça commence. "Au commencement, tout n'était que vide et…"

**A :** Ouahhh… On dirait le premier livre de Moïse dans la Bible. N'a t-il pas erré en Arabie pendant quarante ans avec son peuple avant d'arriver en Israël ? Tu crois que…

**B :** Non ! Après ça change complètement. Ramenons la pierre au camp, je dois pouvoir arriver à la traduire…

**A :** Bill, c'est génial. C'est juste ce qu'il te fallait !

**B :** Oui, j'ai bien dit que j'avais besoin de lire quelque chose, mais c'est pas vraiment à ça que je pensais. Il me tarde de m'y mettre. Il y a des trucs bizarres et je n'arrive pas à comprendre si c'est une histoire…

Ça parle de nombres…

**A :** Il me semble que la pierre est cassée en bas. Elle devait être plus longue.

**B :** Tant mieux ! Sinon on n'aurait jamais pu la porter. Bien sûr, je parie que ça deviendra intéressant à partir de l'endroit où elle est cassé.

**A :** On y est. Je vais chercher des dattes et des fruits pour dîner, pendant que tu traduis. Dommage, mais les langues c'est pas mon truc. Sinon, j'essaierais de t'aider.

. . . . . . . . . . .

**B :** C'est bon, Alice, j'y *suis*. Il y a quelque passages dont je ne suis pas sûr, quelque lettres que je ne connais pas, peut-être d'anciennes conjugaisons, mais dans l'ensemble je pense avoir compris, même si ça ne veut rien dire pour moi. Littéralement ça donne…

Au commencement, tout n'était que vide et chaos. Et J. H. W. H. Conway créa les nombres. Conway dit "Qu'il y ait deux règles qui engendrent tous les nombres, petits et grands.

"Cela sera la première règle : Tout nombre est issu de deux ensembles de nombres déjà existants, tel qu'aucun membre de l'ensemble de gauche n'est supérieur ou égal à un membre quelconque de l'ensemble de droite.

"Cela sera la deuxième règle : Un nombre est inférieur ou égal à un autre nombre si et seulement si, aucun membre de l'ensemble de gauche du premier nombre n'est supérieur ou égal au second nombre, et aucun membre de l'ensemble de droite du second nombre n'est inférieur ou égal au premier nombre. Et Conway regarda les deux règles qu'il avait créés et considéra que c'était très bien.

"Et le premier nombre fut créé à partir du vide à gauche et à droite. Conway appela ce nombre "Zéro" et dit "que ce soit un signe qui sépare les nombres positifs des nombres négatifs". Conway prouva que zéro est inférieur ou égal à zéro et il considéra que c'était bien. Et il fut un soir et un matin et vint le jour zéro.

Et le jour suivant, deux autres nombres furent créés, un avec zéro comme ensemble de gauche, et un avec zéro comme ensemble de droite. Et Conway appela le premier "Un" et le second "Moins Un". Et il prouva que Moins Un est inférieur mais pas égal à Zéro, et que Zéro est inférieur mais pas égal à Un. Et il fut un soir...

C'est là que c'est cassé.

**A** : Tu es *sûr* que c'est bien ça ?

**B** : Plus ou moins. J'ai un peu arrangé l'ensemble.

**A** : Mais "Conway" ... ce n'est pas un nom hébreu. C'est une farce ou quoi ?

**B** : Non, je t'assure. Bien sûr en hébreu ancien il n'y a pas de voyelles, donc le vrai nom doit être Keenawu ou quelque chose comme ça. Ça a peut-être à voir avec les Khans ? Comme il y a très peu de noms français avec un "w", j'ai juste pris un nom anglais. Regarde, c'est là que c'est écrit sur la Pierre. Les lettres J. H. W. H. viennent peut-être de "Jehovah".

**A** : Tu dis qu'il n'y a pas de voyelles ! Alors, c'est vrai... Mais d'après toi, qu'est-ce que ça veut dire ?

**B** : Je n'en ai aucune idée... Ces deux foutues règles sur les nombres. Peut-être est-ce une ancienne technique d'arithmétique, inutilisée depuis que la roue a été inventée. Ça pourrait être intéressant de voir tout ça de près demain. Le soleil va bientôt se coucher, on devrait manger et aller dormir.

**A :** Ok, mais relis la moi encore une fois. J'ai envie d'y réfléchir. La première fois je ne te croyais pas du tout.

**B :** (MONTRANT DU DOIGT) "Au commencement"...

## 2 Les Symboles

**A :** Après tout, je pense que ta Pierre de Conway veut dire quelque chose, Bill. J'y ai réfléchi cette nuit.

**B :** Moi aussi, mais je me suis endormi avant de trouver quoi que ce soit. Alors ?

**A :** En fait, ce n'est pas si compliqué. Le problème, c'est que tout est exprimé en mots. On peut dire la même chose en symboles et alors tout devient plus clair.

**B :** Tu veux dire que vas utiliser les maths modernes pour déchiffrer cette vieille Pierre ?

**A :** Ça me fait horreur, mais c'est vrai. La première règle dit que tout nombre $x$ est en fait une paire d'ensembles, appelés ensemble de gauche $x_G$ et ensemble de droite $x_D$ :

$$x = (x_G, x_D).$$

**B :** Attends une seconde. Tu n'es pas obligée de dessiner dans le sable, je crois que j'ai encore de quoi écrire dans mon sac. Une seconde... voilà.

**A :**

$$x = (x_G, x_D).$$

$x_G$ et $x_D$ ne sont pas seulement des nombres, ce sont des *ensembles* de nombres, et chacun de ces nombres est lui-même une paire d'ensembles, et ainsi de suite.

**B :** Stop ! Je ne comprends rien à ta notation. Je ne comprends plus ce qui est un ensemble, et ce qui est un nombre.

**A :** D'accord, je vais utiliser des majuscules pour les ensembles de nombres et des minuscules pour les nombres. La première règle de Conway dit que :

$$(1) \qquad x = (X_G, X_D) \qquad \text{où} \qquad X_G \not\geq X_D$$

Cela signifie que si $x_G$ est un nombre quelconque de $X_G$ et $x_D$ un nombre quelconque de $X_D$, ils doivent satisfaire $x_G \not\geq x_D$. Cela signifie que $x_G$ n'est pas supérieur ou égal à $x_D$.

**B :** (SE GRATTANT LA TÊTE) Je crois que tu vas encore trop vite pour moi. Tu as déjà tout compris, mais moi je débarque tout juste. Si un nombre est une paire d'ensembles de nombres, lesquels sont eux-mêmes des paires d'ensembles de nombres, et ainsi de suite, comment est ce que tout cela se passe au démarrage ?

**A :** Bonne question ! C'est ce qui fait la beauté de la chose dans le schéma de Conway. Chaque élément de $X_G$ et $X_D$ doit déjà exister. Or le premier jour de la création, il n'y avait aucun nombre pour travailler, donc au départ $X_G$ et $X_D$ ne sont autres que l'ensemble vide !

**B :** Je n'aurais jamais pensé vivre jusqu'au jour où l'ensemble vide servirait à quelque chose. On arrive vraiment à créer quelque chose à partir de rien ? Mais est-ce que $X_G \not\geq X_D$ si $X_G$ et $X_D$ sont tous les deux égaux à l'ensemble vide ? Comment quelque chose peut-il être différent de lui-même ?

Ah, si, si. Je crois que je comprends. Ça marche puisque ça signifie qu'*aucun* élément de l'ensemble vide n'est supérieur ou égal à un élément quelconque de l'ensemble vide. C'est justement vrai parce qu'il n'y a *aucun* élément dans l'ensemble vide.

**A :** Donc, ça se passe bien au départ, et on obtient le nombre appelé zéro. Si on utilise le symbole $\emptyset$ pour l'ensemble vide, on peut écrire

$$0 = (\emptyset, \emptyset).$$

**B :** Incroyable !

**A :** Maintenant, le second jour, on peut utiliser 0 dans l'ensemble de gauche ou l'ensemble de droite. Conway obtient donc deux nouveaux nombres :

$$-1 = (\emptyset, \{0\}) \qquad \text{et} \qquad 1 = (\{0\}, \emptyset).$$

**B :** Voyons voir, est ce-que ça marche ? Pour que $-1$ soit un nombre, il faut qu'aucun élément de l'ensemble vide ne soit supérieur ou égal à zéro. Et pour 1, il faut que 0 ne soit pas supérieur ou égal à un élément quelconque de l'ensemble vide. Ça alors, cet ensemble vide, c'est quelque chose ! Je crois que j'écrirai un jour le livre des "*Propriétés de l'ensemble vide*".

**A :** Tu ne finirais jamais.

Si $X_G$ ou $X_D$ est vide, la condition $X_G \not\geq X_D$ est vraie *quelque soit* le contenu de l'autre ensemble. Cela signifie qu'en fait une infinité de nombres vont être créés.

**B :** Bon, mais qu'est-ce que tu fais de la deuxième règle de Conway.

**A :** C'est elle qui permet de dire si $X_G \not\geq X_D$, quand les deux ensembles ne sont pas vides. C'est la règle qui définit la relation "inférieur ou égal". Ça peut s'écrire :

(2) $\quad x \leq y \quad$ signifie que $\quad X_G \not\geq y$ et $x \not\geq Y_D$.

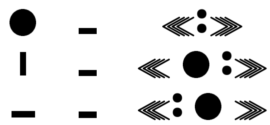
**B :** Attends une seconde, tu vas beaucoup trop vite pour moi. Regarde, $X_G$ est un ensemble de nombres et $y$ est un nombre, c'est à dire, une paire d'ensemble de nombres. Qu'est-ce que tu veux dire quand tu écris $X_G \not\geq y$ ?

**A :** Je veux dire que chaque élément de $X_G$ satisfait $x_G \not\geq y$. En d'autres termes, aucun élément de $X_G$ n'est supérieur ou égal à $y$.

**B :** Ah, je vois, et la règle (2) dit aussi que $x$ n'est pas supérieur ou égal à un élément quelconque de $Y_D$. Est-ce que cela colle avec le texte… ?

**A :** La version de la Pierre est légèrement différente, mais $x \leq y$ doit vouloir dire la même chose que $y \geq x$.

**B :** Oui, tu as raison. Eh, attends une seconde, regarde ces gravures sur le côté :



Ce sont les symboles que je ne pouvais pas déchiffrer hier, et ta notation rend tout limpide comme du cristal ! Ces deux points séparent l'ensemble de gauche de l'ensemble de droite. Tu dois être sur la bonne piste.

**A :** Ouahh ! Des signes égaux et tout ! Ce sculpteur de l'age de pierre a dû utiliser ▬ pour dire $-1$. Je préfère presque sa notation à la mienne.

**B :** Je pense qu'on a sous-estimé les hommes préhistoriques. Ils devaient avoir des vies compliquées et besoin de gymnastique mentale juste comme nous—au moins quand ils n'étaient pas obligés de se battre pour se nourrir et pour se protéger. On simplifie trop l'histoire quand on y pense.

**A :** Oui, mais sinon comment pourrait-on l'étudier ?

**B :** Peut-être…

**A :** Maintenant voilà la partie du texte que je ne comprends pas. Le premier jour de la création, Conway "démontre" que $0 \leq 0$. Pourquoi, s'embête-t-il à démontrer que quelque chose est inférieur ou égal à lui-même, puisque c'est forcément égal à lui-même. Et ensuite, le second jour, il démontre que $-1$ n'est pas égal à 0 ! N'est-ce pas évident, sans démonstration, puisque $-1$ est un autre nombre ?

**B :** Hmmm. Je ne sais pas pour toi, mais moi j'ai bien envie d'aller nager.

**A :** Bonne idée. Ces vagues m'ont l'air super, et puis j'ai perdu l'habitude de me concentrer autant. Allons-y !

# 3 Les Démonstrations

**B :** J'ai pensé à quelque chose quand on se promenait tout à l'heure. Peut être que ma traduction n'est *pas* correcte.

**A :** Non ? Mais, elle *doit* l'être ! On a déjà vérifié trop de choses...

**B :** Je sais, mais maintenant que j'y pense, je ne suis pas vraiment sûr du mot que j'ai traduit pas "égal à". Peut-être qu'il a un sens plus faible, "semblable à" ou "*similaire* à". A ce moment là, la deuxième règle de Conway devient : "Un nombre est inférieur ou similaire à un autre nombre si et seulement si..." Ensuite, il démontre que zéro est inférieur ou similaire à zéro, moins un est inférieur mais pas similaire à zéro, et ainsi de suite.

**A :** Oui, ça doit être ça. Il utilise ce mot dans un sens technique abstrait qui doit être défini par des règles. Alors, *bien sûr*, il doit démontrer que 0 est inférieur ou similaire à 0, de manière à vérifier que, par sa définition, un nombre est similaire à lui-même.

**B :** Et maintenant est-ce que ça marche ? D'après la règle (2) il doit montrer qu'aucun élément de l'ensemble vide n'est supérieur ou similaire à zéro, et que 0 n'est ni supérieur ni similaire à un élément quelconque de l'ensemble vide. D'accord, ça marche. L'ensemble vide triomphe une fois de plus...

**A :** Le plus intéressant, c'est la manière dont il démontre que $-1$ n'est *pas* similaire à zéro. Le seul moyen que je voie est de démontrer que 0 n'est ni inférieur ni similaire à $-1$. La règle (2) nous dit si un nombre est inférieur ou similaire à un autre nombre. Et si $x$ n'est pas inférieur ou similaire à $y$, il n'est pas inférieur à $y$, et il n'est pas similaire à $y$.

**B :** Je vois, nous voulons montrer que $0 \leq -1$ est faux. C'est la règle (2) avec $x = 0$ et $Y_D = \{0\}$. Donc, $0 \leq -1$ si et seulement si $0 \not\geq 0$. Mais, $0 \geq 0$, on le sait déjà. Donc, $0 \not\leq -1$. Il a raison.

**A :** Je me demande si Conway a aussi comparé $-1$ et 1. Je suppose qu'il l'a fait même si on n'en parle pas du tout sur la Pierre. Si les règles sont bonnes, on devrait pouvoir montrer que $-1$ est inférieur à 1.

**B :** Voyons voir : $-1$ c'est $(\emptyset, \{0\})$, et 1 c'est $(\{0\}, \emptyset)$. Donc, une fois encore, grâce à l'ensemble vide, la règle (2) donne $-1 \leq 1$. D'un autre côté $1 \leq -1$ revient à dire $0 \not\geq -1$ et $1 \not\geq 0$ d'après la règle (2). Et on sait que ces deux propositions sont fausses. Donc, $1 \not\leq -1$ et on doit avoir alors $-1 < 1$. Les règles de Conway semblent marcher.

**A :** Oui, mais pour l'instant on a utilisé l'ensemble vide dans presque tous les arguments, donc les véritables implications des règles ne sont pas encore claires. Est-ce que tu as remarqué que presque tout ce que nous avons démontré jusqu'à présent peut être résumé ainsi :

Si $X$ et $Y$ sont des ensembles quelconques de nombres, alors $x = (\emptyset, X)$ et $y = (Y, \emptyset)$ sont des nombres et $x \leq y$.

**B :** C'est super la façon dont tu peux prouver une infinité de choses en généralisant le schéma que j'ai utilisé une ou deux fois. C'est bien ça l'abstraction ou la généralisation ou quelque chose ? Mais peux-tu montrer que $x$ est strictement *inférieur* à $y$ ? C'était vrai dans tous les cas simples et je parie que c'est vrai en général.

**A :** Ouais... En fait non, pas quand $X$ et $Y$ sont tous les deux vides, car cela voudrait dire que $0 \not\geq 0$. Mais sinon ça semble intéressant. Prenons le cas où $X$ est l'ensemble vide et $Y$ est non vide. Est-il vrai que 0 est inférieur à $(Y, \emptyset)$ ?

**B :** Si c'est vrai, alors on peut appeler $(Y, \emptyset)$ un nombre "positif". C'est ce que Conway doit vouloir dire en séparant par zéro les nombres positifs des nombres négatifs.

**A :** Oui, mais regarde. D'après la règle (2), $(Y, \emptyset) \leq 0$ si et seulement si aucun membre de $Y$ n'est supérieur ou similaire à zéro. Donc, si $Y$ est l'ensemble $\{-1\}$ par exemple, alors $(Y, \emptyset) \leq 0$. Tu voudrais que les nombres positifs soient $\leq 0$ ? Dommage que je n'aie pas parié avec toi.

**B :** Hmm. Tu dis que $(Y, \emptyset)$ va être positif seulement quand $Y$ contient un nombre qui est zéro, ou supérieur à zéro. Tu dois avoir raison je suppose. Maintenant au moins, on comprend tout ce qui est écrit sur la Pierre.

**A :** Tout jusqu'à l'endroit où elle est cassée.

**B :** Tu veut dire...

**A :** Je me demande ce qui s'est passé le *troisième* jour.

**B :** Oui, on devrait pouvoir le deviner maintenant qu'on connaît les règles. Ça pourrait être marrant de travailler sur le troisième jour, après le déjeuner.

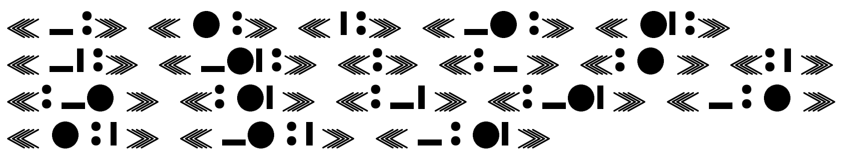
**A :** Tu devrais aller pêcher maintenant. On n'a presque plus de viande séchée. Je vais voir si j'arrive à trouver des noix de coco.

## 4 Les Mauvais Nombres

**B :** J'ai travaillé sur le problème du Troisième Jour. J'ai bien peur que cela ne soit très compliqué. A force de créer de plus en plus de nombres, le nombre d'ensembles possibles augmente de façon vertigineuse. Je parie qu'au septième jour, Conway avait besoin de se reposer.

**A :** Oui. Moi aussi, j'y ai travaillé. J'arrive à **dix-sept** nombres le Troisième Jour.

**B :** Dix-sept ? J'en ai trouvé dix-neuf, il doit t'en manquer deux. Voilà ma liste :



**A :** Je vois que tu utilises la notation de la Pierre. Mais pourquoi est-ce tu comptes ≪:≫ ? Il a déjà été créé le premier jour.

**B :** Il faut comparer les nouveaux nombres aux anciens pour savoir où ils se placent.

**A :** Je n'ai compté que les *nouveaux* nombres dans ma liste des *dix-sept*. Donc en fait, il doit y en avoir *vingt* différents à la fin du Troisième Jour. Regarde, tu as oublié

dans ta liste.

**B :** (CLIGNANT DES YEUX) En effet. Hmm... vingt fois vingt, cela fait quatre cent cas possibles qu'il va falloir examiner par la règle (2). C'est beaucoup de travail, pas très marrant d'ailleurs. Mais, on est obligé d'y passer, sinon je ne pourrais pas avoir l'esprit tranquille.

**A :** Peut-être y a-t-il un moyen de simplifier le travail.

**B :** Ce serait bien...

Bon, j'ai déjà un résultat : 1 est inférieur à $(\{1\}, \emptyset)$. D'abord j'ai dû démontrer que $0 \not\geq (\{1\}, \emptyset)$.

**A :** Moi, j'ai utilisé une autre méthode. La règle (2) dit que nous devons tester chaque élément de $X_G$ pour voir s'il n'est pas supérieur ou similaire à $y$, mais tous ces tests ne doivent pas être nécessaires. Si un élément quelconque de $X_G$ est $\geq y$ alors le *plus grand* élément de $X_G$ devrait être $\geq y$. De même, on n'a besoin de comparer $x$ qu'au *plus petit* élément de $Y_D$.

**B :** Oui, tu dois avoir raison…

Je peux montrer que 1 est inférieur à $(\{0,1\},\emptyset)$ de la même façon que j'ai montré qu'il est inférieur à $(\{1\},\emptyset)$. Le "0" supplémentaire dans $X_G$ n'a pas l'air de changer grand chose.

**A :** Si j'ai raison, cela nous économisera beaucoup de travail, car chaque nombre $(X_G, X_D)$ se comporte dans toutes les relations $\leq$ exactement comme si $X_G$ était remplacé par son plus grand élément et $X_D$ par son plus petit. On n'aura besoin de considérer aucun nombre où $X_G$ ou $X_D$ ont deux éléments ou plus. Donc, dans la liste des vingt nombres, on peut en éliminer dix !

**B :** Doucement ! Comment montre-t-on une chose pareille ?

**A :** Ce qu'il nous faut, c'est une règle du type

(T1) Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.

A priori, ce n'est pas évident, même si c'est cohérent avec tout ce que l'on sait déjà.

**B :** Il faut à tout prix que cela soit vrai, si l'on veut que les nombres de Conway soient plausibles. On pourrait l'admettre et avancer, mais ce serait quand même bien de montrer une fois pour toutes que c'est vrai, en utilisant simplement les règles de Conway.

**A :** Oui, et comme ça, on résoudrait le problème du Troisième Jour sans se fatiguer davantage. Voyons, comment peut-on la démontrer…

**B :** Quelle plaie, ces mouches ! Juste au moment où j'essaye de me concentrer. Alice, est-ce que tu pourrais … Non, finalement, je préfère aller faire un tour.

. . . . . . . . . . .

Alors, ça marche ?

**A :** Non, je tourne en rond. Entre $\not\geq$ et $\leq$, je mélange tout. Tout est exprimé de façon négative. Les choses paraissent incroyablement compliquées.

**B :** Peut-être que (T1) n'est pas vraie.

**A :** Mais cela *doit* être vrai. Eurêka ! On va essayer de montrer que c'est *faux*, et quand on échouera, la raison même de notre échec constituera la démonstration.

**B :** Bonne idée, c'est toujours plus facile de montrer que quelque chose est faux, plutôt que c'est vrai.

**A :** On suppose que l'on a trois nombres $x$, $y$, et $z$ vérifiant

$$x \leq y \qquad \text{et} \qquad y \leq z, \qquad \text{mais} \qquad x \not\leq z.$$

Qu'est-ce que la règle (2) donne à propos de "mauvais nombres" comme ceux-ci ?

**B :** Elle dit que

$$\begin{array}{rrcl} & X_G & \not\geq & y, \\ \text{et} & x & \not\geq & Y_D, \\ \text{et} & Y_G & \not\geq & z, \\ \text{et} & y & \not\geq & Z_D \end{array}$$

On a aussi $x \not\leq z$; qu'est-ce que *cela* signifie ?

**A :** Cela signifie qu'une des deux conditions n'est pas satisfaite. Soit il y a un nombre $x_G$ de $X_G$ tel que $x_G \geq z$, soit il y a un nombre $z_D$ de $Z_D$ tel que $x \geq Z_D$. Avec tous ces résultats sur $x$, $y$, et $z$, on doit pouvoir démontrer *quelque chose* !

**B :** Bon, puisque $x_G$ est dans $X_G$, il ne peut pas être supérieur ou similaire à $y$. Disons qu'il est inférieur à $y$. On a $y \leq z$, donc $x_G$ doit être... Non, désolé, je ne peux pas utiliser des propriétés de nombres que je n'ai pas démontrées.

D'un autre côté, on sait que $y \leq z$ et $z \leq x_G$ et $y \not\leq x_G$. On a donc trois mauvais nombres de plus, ce qui nous donne encore plus de résultats. Ça a l'air horriblement compliqué !

**A :** Bill, tu y es !

**B :** Oui ?

**A :** Si $(x, y, z)$ sont trois mauvais nombres, il y a deux cas possibles.

*Premier cas*, il existe un $x_G \geq z$. Alors,$(y, z, x_G)$ sont trois mauvais nombres de plus.

*Deuxième cas*, il existe un $z_D \leq x$. Alors, $(z_D, x, y)$ sont trois mauvais nombres de plus.

**B :** Tu es sûr que tu ne tournes pas en rond ? Il y a de plus en plus de mauvais nombres.

**A :** Non, dans chaque cas les nouveaux nombres sont *plus simples* que ceux de départ, et l'un d'entre eux existait déjà. On ne peut pas continuer indéfiniment à trouver des ensembles de mauvais nombres qui existaient déjà. Donc en fait, il ne peut pas du tout y avoir de mauvais ensembles.

**B :** (RADIEUX) Ouahh ! Tu dis en fait : Chaque nombre $x$ a été créé un jour $j(x)$. S'il y a trois mauvais nombres $(x, y, z)$ pour lesquels la somme des jours de création $j(x) + j(y) + j(z) = n$, alors l'un des deux cas s'applique et donne trois mauvais nombres dont la somme des jours est inférieure à $n$. Ceux-là produisent à leur tour un ensemble dont la somme est encore plus petite, et ainsi de suite. Mais on ne peut plus continuer car il n'y a pas trois nombres dont la somme des jours est inférieure à trois.

**A :** Exact, tout ça s'exprime bien en utilisant la somme des jours de création. S'il n'y a pas trois mauvais nombres $(x, y, z)$ dont la somme des jours est inférieure à $n$, les deux cas montrent qu'il n'y en a pas dont la somme des jours vaut $n$. C'est en fait une démonstration par récurrence sur la somme des jours.

**B :** Toi et ton jargon ! C'est *l'idée* qui compte.

**A :** C'est vrai, mais il faut donner un nom à l'idée pour pouvoir l'utiliser plus facilement la prochaine fois.

**B :** Oui, il y aura sans doute une prochaine fois... D'accord, je suppose que je n'ai plus aucune raison de refuser si catégoriquement le jargon des Maths Modernes . Je le sais et tu le sais, on vient juste de démontrer la *relation de transitivité*.

**A :** (SOUPIRANT) Pas mal pour des mathématiciens amateurs !

**B :** C'est toi qui a tout fait. Je proclame ici que la relation de transitivité (T1) sera connue depuis ce jour comme le théorème d'Alice.

**A :** Arrête un peu... Je suis sûre que Conway l'a découverte il y a longtemps.

**B :** Cela ne change rien au fait que tu l'aies trouvée. Je parie que tous les grands mathématiciens ont commencé par redécouvrir tout un tas de résultats "bien connus".

**A :** Pff, descends un peu de ton nuage ! Le principal c'est de s'amuser.

## 5 Le Progrès

**B** : Je viens de penser à un truc. Serait-il possible d'avoir deux nombres qui n'ont aucun rapport entre eux ? Je veux dire tels que :

$$x \not\leq y \qquad \text{et} \qquad y \not\leq x$$

comme si l'un des deux était hors d'atteinte ou dans une autre dimension ou quelque chose comme ça. Ça ne devrait pas arriver, mais comment pourrait-on le prouver ?

**A** : Je suppose qu'on pourrait essayer la même technique que tout à l'heure. Si $x$ et $y$ sont deux mauvais nombres (qui ne vérifient pas ton hypothèse), alors on a soit un des $x_G \geq y$, soit $x \geq$ à un des $y_G$.

**B** : Hmmmm, suppose que $y \leq x_G$. Alors, si $x_G \leq x$, on aurait $y \leq x$ par notre loi de transitivité, et nous avons supposé que $y \not\leq x$. Donc, $x_G \not\leq x$. Dans l'autre cas, $y_D \leq x$, et on montrerait de même que $y \not\leq y_D$.

**A** : C'est pas bête du tout ! Tout ce qu'il nous reste à faire maintenant pour montrer que deux tels nombres ne peuvent exister, c'est de prouver un résultat que je soupçonnais depuis longtemps. Tout nombre $x$ doit être compris entre les éléments de ses ensembles de gauche et de droite, $X_G$ et $X_D$. C'est à dire :

$$\text{(T2)} \qquad X_G \leq x \text{ et } x \leq X_D.$$

**B** : Ça ne doit pas être difficile à montrer. Qu'est-ce que $x_G \leq x$ veut dire ?

**A** : Soit il existe un nombre $x_{G_G}$ dans $X_{G_G}$ tel que $x_{G_G} \geq x$, soit il existe un nombre $x_D$ dans $X_D$ tel que $x_G \geq x_D$. Mais d'après la règle (1), le second cas ne peut pas être vérifié.

**B** : Je *savais* que nous utiliserions la règle (1) tôt ou tard. Mais que pouvons-nous faire avec $x_{G_G}$ ? Je n'aime pas les doubles indices.

**A** : Et bien, $x_{G_G}$ est un élément de l'ensemble de gauche de $x_G$. Comme $x_G$ a été créé avant $x$, on peut au moins supposer que $x_{G_G} \leq x_G$ par récurrence.

**B** : Continue.

**A** : Voyons, $x_{G_G} \leq x_G$, donc $x_{G_{G_G}} \not\geq x_G$ et ...

**B** : (L'INTERROMPANT) Je ne veux pas voir ça ! Tes indices vont de pire en pire.

**A** : Merci pour ton aide précieuse...

**B** : Mais regarde, je *t'aide*, je te dis de virer ces indices délirants !

**A :** Mais je... Bon, tu as raison, excuse moi de m'être embarqué dans une voie aussi stupide. On a $x \leq x_{G_G}$ et $x_{G_G} \leq x_G$, donc la loi de transitivité nous dit que $x \leq x_G$. On ne doit probablement plus avoir besoin d'indices multiples.

**B :** Oui, ça marche !... On ne peut pas avoir $x \leq x_G$ parce que cela voudrait dire que $X_G \not\geq x_G$, ce qui est impossible, puisque $x_G$ est un des éléments de $X_G$.

**A :** Bien vu ! Mais comment sais-tu que $x_G \leq x_G$ ?

**B :** Quoi ? Tu veux dire qu'on a fait tout cela sans même avoir prouvé qu'un nombre est similaire à lui-même ? Incroyable... La preuve doit être facile.

**A :** Peut-être que tu la vois, mais je ne crois pas que ce soit évident. De toutes façons essayons de prouver que

(T3) $\qquad x \leq x.$

̧a veut dire que $X_G \not\geq x$ et $x \not\geq X_R$.

**B :** Ça ressemble curieusement à (T2). Mais ouh là là, nous revoici au même point, à essayer de montrer que $x \leq x_G$ est impossible.

**A :** Cette fois-ci, c'est bon, Bill ! Ton raisonnement montre que $x \leq x_G$ implique $x_G \not\geq x_G$, ce qui est impossible par récurrence.

**B :** Super, ça veut dire que (T3) est vrai donc tout s'arrange. Nous avons déjà prouvé la partie $X_G \leq x$ de (T2), et l'autre partie doit s'en déduire par le même raisonnement en échangeant partout gauche et droite.

**A :** Et comme nous l'avons dit, (T2) suffit pour prouver que tous les nombres sont comparables. En d'autres mots,

(T4) $\qquad$ Si $x \not\leq y$, alors $y \leq x$.

**B :** Ok. Maintenant nous n'avons plus besoin de nous embêter à dire les choses de façon indirecte, puisque "$x \not\geq y$" signifie exactement que "$x$ est plus petit que $y$".

**A :** Je vois. C'est la memê chose que "$x$ est plus petit ou similaire à $y$ mais n'est pas similaire à $y$. On peut maintenant écrire

$$x < y$$

à place de $x \not\geq y$. Les règles de départ (1) et (2) ont bien meilleur allure. Je me demande pourquoi Conway n'a pas défini les choses de cette manière. Peut-être parce qu'une troisième règle serait nécessaire pour définir ce que "plus petit que" veut dire, et il voulait limiter le nombre de lois.

**B** : Je me demande s'il est possible d'avoir deux nombres différents qui sont similaires. Je veux dire : peut-on avoir à la fois $x \le y$ et $x \ge y$ quand $X_G$ n'est pas le même ensemble que $Y_G$ ?

**A** : Bien sûr ! Nous avons vu quelque chose comme ça avant le repas. Rappelle-toi : nous avons trouvé que $0 \le y$ et $y \le 0$ quand $y = (\{-1\}, \emptyset)$. Et je crois que $(\{0, 1\}, \emptyset)$ s'est avéré être similaire à $(\{1\}, \emptyset)$.

**B** : Tu as raison ! Quand $x \le y$ et $x \ge y$, je devine que $x$ et $y$ sont effectivement égaux pour toutes utilisations pratiques. Car la loi de transitivité ¡nous dit que $x \le z$ si et seulement si $y \le z$. Ils sont interchangeables.

**A** : Autre chose. Nous avons deux lois de transitivité supplémentaires, je veux dire :

| | |
|---|---|
| (T5) | Si $x < y$ et $y \le z$, alors $x < z$. |
| (T6) | Si $x \le y$ et $y < z$, alors $x < z$. |

**B** : Très joli ! En fait, ces deux lois découlent directement de (T1) si on considère que "$x < y$" est équivalent à "$x \not\ge y$." Il n'y a pas besoin d'utiliser (T2), (T3), ou (T4) pour prouver (T5) ou (T6).

**A** : Tu sais, quand on regarde tout ce que l'on a déjà prouvé, c'est vraiment chouette. C'est étonnant que tant de choses découlent des deux règles de Conway.

**B** : Alice, c'est un nouveau visage que je te découvre aujourd'hui. Tu viens de détruire la légende qui veut que les femmes soient incapables de faire des maths.

**A** : Eh bien merci, galant chevalier !

**B** : Tu sais, ça peut paraître idiot, mais travailler avec toi sur des trucs si créatifs me rend tout excité ! Les gens pensent que trop de travail intellectuel tue le désir physique, mais vraiment voilà longtemps que je ne m'étais pas aussi bien senti.

**A** : A vrai dire, moi non plus !

**B** : Regarde ce coucher de soleil. Il me fait penser au poster que nous avons acheté. Et regarde la mer.

**A** : (COURANT) Allons-y !

# 6 Le Troisième Jour

**B :** Bon dieu ! Je n'ai jamais aussi bien dormi de ma vie !

**A :** Moi non plus ! C'est si bon de se réveiller et de se sentir en forme sans avoir besoin de café pour tenir le coup.

**B :** Où en étions nous resté hier, avant de perdre la tête et de tout oublier des maths.

**A :** (SOURIANT) Je crois que nous venions juste de prouver que les nombres de Conway sont des gentils petits nombres qui font ce qu'on attend eux. On peut les écrire les uns à côté des autres, du plus petit au plus grand, chaque nombre étant plus grand que ceux qui se trouvent à sa gauche, et plus petit que ceux qui se trouvent à sa droite.

**B :** Et nous avons réellement prouvé ça ?

**A :** Ouaip ! Et de toutes façons, les nombres différents peuvent être ordonnés d'après la loi (T4). Chaque nouveau nombre créé doit trouver sa place parmi ceux qui existent déjà.

**B :** Il devrait nous être facile maintenant de découvrir ce qui arriva le Troisième Jour. Il ne doit plus rester grand chose des $20 \times 20$ comparaisons. Nos théorèmes (T2) et (T3) montrent que

≪ : ▬ ≫ < ▬
< ≪ ▬ : ● ≫
< ●
< ≪ ● : ▮ ≫
< ▮
< ≪ ▮ : ≫ .

Donc, sept des nombres sont déjà placés et il ne nous reste plus qu'à faire pareil pour les autres. Tu sais, maintenant que ça devient plus facile, c'est bien plus marrant qu'un mot croisé.

**A :** Nous savons aussi par exemple que ≪ ▬ : ▮ ≫ se trouve quelque part entre ▬ et ▮. Comparons le à l'élément central zéro.

**B :** Hmmm. C'est à la fois $\leq 0$ et $\geq 0$, donc ce doit être similaire à zéro d'après la règle (3). Comme j'ai dit hier, c'est *effectivement* égal à zéro. Donc, on peut tout aussi bien l'oublier. Ça en fait huit de faits ! Plus que douze...

**A** : Essayons de nous débarrasser des dix cas pour lesquels $X_G$ ou $Y_D$ ont plus d'un élément, comme j'ai essayé de le faire hier matin. J'ai eu une idée pendant la nuit, qui devrait marcher. Supposons que $x = (X_G, X_D)$ est un nombre, et prenons deux autres ensembles $Y_G$ et $Y_D$, pour lesquels on a :

$$Y_G < x < Y_D$$

alors je pense qu'il est vrai que $x$ est similaire à $z$ en posant :

$$z = (Y_G \cup X_G, Y_D \cup X_D).$$

En d'autres mots, agrandir les ensembles $X_G$ et $X_D$ en ajoutant des nombres à gauche ou à droite selon le cas, ne change pas vraiment $x$.

**B** : Voyons voir, cela semble possible. On peut déjà dire que $z$ est un nombre d'après la règle (1). Il sera donc créé tôt ou tard.

**A** : Pour montrer que $z \leq x$ nous pouvons prouver que :

$$Y_G \cup X_G < x \qquad \text{et} \qquad z < X_D.$$

C'est facile maintenant puisque nous savons que $Y_G < x$, $X_G < x$, et d'après la règle (T3), $z < X_D \cup Y_D$.

**B** : En utilisant le même raisonnement, en échangeant la droite et la gauche, on montre que $x \leq z$. Tu as raison, c'est vrai :

$$\text{(T7)} \qquad \text{Si } Y_G < x < Y_D, \text{ alors } x \equiv (Y_G \cup X_G, Y_D \cup X_D).$$

(J'écrirai "$x \equiv z$" qui signifie que $x$ est similaire à $z$, c'est à dire $x \leq z$ et $z \leq x$.)

**A** : Ceci prouve juste ce que nous voulons. Par exemple,

⋘ ▬● ⁚❙ ⋙ ≡ ⋘ ● ⁚❙ ⋙
⋘⁚ ▬● ⋙ ≡ ⋘⁚ ▬ ⋙ ,

et ainsi de suite.

**B** : Donc, il ne nous reste plus que deux cas : ⋘ ▬ ⁚⋙ et ⋘⁚❙ ⋙ .

**A** : En fait, (T7) s'applique à ces deux cas. Il suffit de prendre $x = 0$.

**B** : Subtil ! On maîtrise maintenant parfaitement le Troisième Jour. Seuls les sept nombres que nous avions tout à l'heure sont vraiment différents.

**A** : Je me demande si la même chose pourrait marcher pour les jours suivants. Supposons que les différents nombres obtenus à la fin de $n$ jours soient :

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m.$$

Alors, peut-être que les seuls nouveaux nombres créés le $(n+1)$ème jour sont :

$$(\emptyset, \{x_1\}), (\{x_1\}, \{x_2\}), \ldots, (\{x_{m-1}\}, \{x_m\}), (\{x_m\}, \emptyset).$$

**B** : Alice, tu es merveilleuse ! Si nous pouvons prouver ceci, on pourra résoudre le problème pour n'importe quel jour, d'un seul coup, et jusqu'à l'infini ! Tu vas plus loin que le Créateur lui-même !

**A** : Peut-être ne nous pourrons pas le prouver.

**B** : Essayons quand même quelques cas particuliers. Par exemple, prenons le nombre $(\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\})$, il devrait être similaire à un de ceux dont tu parlais tout à l'heure.

**A** : Bien sûr ! Il est similaire à $x_i$ à cause de la loi (T7). Regarde ! Chaque élément de $X_{i_G}$ est $\leq x_{i-1}$, et chaque élément de $X_{i_D}$ est $\geq x_{i+1}$. Cependant, d'après (T7) nous avons

$$x_i \equiv (\{x_{i-1}\} \cup X_{i_G}, X_{i_D} \cup \{x_{i+1}\})$$

et encore d'après (T7),

$$(\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\}) \equiv (X_{i_G} \cup \{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\} \cup X_{i_D}).$$

Par la loi de transitivité,

$$x_i \equiv (\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\}).$$

**B** : (SECOUANT LA TÊTE) Incroyable, Holmes !

**A** : Elémentaire mon cher Watson. On n'utilise ici que la déduction.

**B** : Tes indices ne sont pas super, mais pour cette fois, je ferme les yeux. Que ferais-tu avec le nombre $(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\})$ si $i < j$ ?

**A** : (HAUSSANT LES ÉPAULES) Je craignais que tu me le demande. Je ne sais pas...

**B** : La même démonstration marcherait parfaitement s'il y avait un nombre $x$ pour lequel chaque élément de $X_G$ est $\leq x_{i-1}$ et chaque élément de $X_D$ est $\geq x_{j+1}$.

**A :** Oui, tu as raison, je n'avais pas pensé à ça . Mais tous les éléments $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ qui se trouvent entre eux devraient intervenir.

**B :** Je le suppose aussi... Ça y est ! J'ai trouvé ! Supposons que $x$ soit l'un des éléments $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_j$ qui a été créé en *premier*. Alors, $X_G$ et $X_D$ ne peuvent contenir aucun des autres nombres. Donc, $(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\}) \equiv x$.

**A :** Permets moi de t'embrasser pour avoir trouvé ça !

. . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . .

**B :** (SOURIANT) Pourtant, le problème n'est pas complètement résolu. Nous devons considérer les nombres tels que $(\emptyset, \{x_{j+1}\})$ et $(\{x_{i-1}\}, \emptyset)$. Mais dans le premier cas c'est, des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_j$, celui qui a été créé en premier, et dans le second cas, c'est, des nombres $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m$, celui qui a été créé en premier.

**A :** Et si le nombre créé en premier n'était pas unique ? Je veux dire si parmi les $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_j$ plusieurs nombres avaient été créés en premier ?

**B :** Oooops... Non, c'est bon, ça ne peut pas arriver, parce que la preuve est toujours valable. Et cela montrerait que les deux nombres sont similaires l'un à l'autre ce qui est impossible.

**A :** Superbe ! Tu viens de résoudre d'un coup tous les problèmes "du jour" à venir.

**B :** Avec ton aide. Voyons voir, le Quatrième Jour il y aura huit nouveaux nombres. Le cinquième il y en aura seize de plus, etc.

**A :** Après le $n^{\text{ième}}$ jour, exactement $2^n - 1$ différents nombres auront été créés.

**B :** Tu sais, je ne crois pas que ce mec, là, ce Conway, était si intelligent que ça. Je veux dire, il aurait pu nous donner des règles beaucoup plus simple avec les mêmes effets. Il n'y a pas besoin de parler d'ensembles et de nombres, tout ça ne tient pas debout. Il aurait pu simplement nous dire que les nouveaux nombres sont créés entre deux nombres adjacents qui existent déjà, ou bien aux extrémités.

C : Attendez d'arriver aux ensembles infinis.

**A :** Qu'est-ce que c'était ? Tu as entendu ?

**B :** Je crains que la saison des pluies n'arrive bientôt...

## 7 La Découverte

**A** : Bon, nous avons résolu tous les problèmes que posait cette Pierre, mais je ne peux m'empêcher de penser que quelque chose manque encore.

**B** : Qu'est ce que tu veux dire ?

**A** : Bon, comme nous le savons, le Troisième Jour, quatre nouveaux nombres ont été créés. Mais nous ne savons pas comment Conway les a appelés.

**B** : Et bien, un des nombres était plus grand que 1, donc je suppose qu'il l'a appelé le nombre "2". Et un autre entre 0 et 1, qu'il a peut-être appelé "$\frac{1}{2}$."

**A** : Ce n'est pas le problème. Ce qui me tracasse vraiment, c'est de savoir pourquoi ce sont des *nombres*. Pour être des nombres, ils devraient pouvoir être additionnés, soustraits, etc. . .

**B** : (FRONÇANT LES SOURCILS) Je vois. Tu penses que sur le morceau manquant de la Pierre, Conway a donné des lois supplémentaires qui rendraient ces nombres numériques. En fait, tout ce que nous avons maintenant c'est un tas d'objets ordonnés proprement, bien en ligne, mais nous ne pouvons rien faire avec.

**A** : Je ne pense pas être capable de deviner ces lois, en supposant bien sûr, qu'elles existent.

**B** : On est donc coincé. A moins de trouver la partie manquante. Et je ne me souviens pas de l'endroit où nous avons trouvé la première bloc.

**A** : Moi je me souviens. J'ai pris soin de bien noter l'endroit où on l'a trouvé, pour le cas où on déciderait d'y retourner.

**B** : Qu'est-ce que je deviendrais, sans toi ? ! Allons-y !

**A** : Eh ! Attends ! Tu ne penses pas qu'on devrait d'abord manger un morceau.

**B** : Tu as raison. Ce mystère me passionne à tel point que j'en oublie ma faim. Nous creuserons après.

. . . . . . . . . . .

**A** : (CREUSANT) Dis Bill, j'ai peur qu'on ne soit obligé de s'arrêter là. La roche sous le sable est trop dure. Il nous faudrait d'autres outils.

**B** : Ouaip ! On n'y arrivera pas en continuant à creuser le sol avec un couteau. Oh ! Voilà la pluie en plus. Tu veux qu'on retourne au campement ?

**A :** Regarde ! Il y a une grotte au bas de la falaise ! Nous pourrons nous y abriter de l'orage. Ouah ! Quel déluge !

. . . . . . . . . . .

**B :** Ce qu'il fait sombre ici ! Aie ! Je me suis cogné l'orteil !

**A :** Bill ! On l'a trouvé ! Tu t'es cogné contre le deuxième bloc de la Pierre !

**B :** (TRESSAILLANT) Bon sang, tu as raison ! C'est un miracle ! Mais mon orteil ne partage peut-être pas totalement ma joie.

**A :** Essaie de la lire, Bill. C'est bien elle ? C'est ce que nous cherchions, hein ?

**B :** Il fait trop sombre pour y voir quelque chose. Aide-moi à la sortir dehors. La pluie va enlever toute cette boue collée dessus. Oh, je distingue les mots "Conway" et "nombre". Ça *doit* être ce que nous cherchons.

**A :** Super, on est sauvé ! On va pouvoir l'étudier en détail.

**B :** On a ce qu'il faut désormais. Mais je crois que je vais retourner dans la grotte. La pluie s'arrêtera sans doute bientôt.

**A :** (LE SUIVANT) Allons-y, ou on finira tous les deux noyés.

. . . . . . . . . . .

**B :** Je me demande pourquoi les maths, qui sont si pénibles en classe, sont si intéressantes maintenant ! Tu-te rappelles ce vieux schnok de Professeur Landau ? Je détestais vraiment ses cours : théorème, démonstration, lemme, remarque, théorème, démonstration, . . . , quelle prise de tête !

**A :** Oui, je me souviens que je m'endormais tout le temps. Mais peut-être que *nos* magnifiques découvertes seraient tout aussi pénibles, non ?

**B :** C'est vrai. J'ai moi-même cette envie folle de présenter nos résultats à une classe remplie d'élèves : théorème, démonstration, lemme, remarque, . . . Et ce serait si nickel que personne ne pourrait un instant deviner comment nous les avons trouvés, et tout le monde serait *drôlement* impressionné !

**A :** Ou ennuyé.

**B :** Oui, plutôt. J'imagine que c'est en cherchant qu'on parvient à la beauté et pas en écoutant.

**A :** Mais par essence, c'est beau. Et j'aime presque autant t'écouter me racontant ta dernière découverte que de découvrir moi-même quelque chose. Quelle est la différence ?

**B :** Mais si je suis capable maintenant d'apprécier vraiment ce que *tu* as trouvé, c'est parce que j'ai moi-même passé du temps à me creuser les méninges sur le problème.

**A :** Avant, ça paraissait ennuyant parce que nous ne nous sentions pas concernés du tout. On nous disait d'assimiler ce que quelqu'un d'autre avait trouvé, et au bout du compte, on n'y trouvait aucun intérêt.

**B :** Désormais, chaque fois que je lirai un bouquin de math, j'essaierai de découvrir comment les choses s'enchaînent avant de regarder la solution. Et même si je n'arrive pas à démontrer le résultat, je crois que je pourrais au moins apprécier la beauté de la démonstration.

**A :** Je crois que nous devrions aussi essayer de deviner les théorèmes, ou du moins découvrir pourquoi et comment démontrer de tels théorèmes. On devrait se mettre à la place du type qui a découvert le résultat. La partie créative est vraiment plus intéressante que la partie déductive. Au lieu de se concentrer pour trouver les bonnes réponses aux questions, on devrait apprendre à formuler les bonnes questions.

**B :** Je crois que tu tiens là quelque chose d'important. J'aimerais voir les profs nous donner des problèmes comme : "Trouver une propriété intéressante de $x$" plutoî que "Démontrer $x$."

**A :** Exact. Mais les profs sont si conservateurs, qu'ils auraient peur d'effrayer les très bons et très conciencieux élèves qui font tous les devoirs bien mécaniquement, avec obéissance. En plus, ils ne voudraient pas le boulot supplémentaire consistant à noter les réponses à des questions qui n'étaient pas posées. On a pris l'habitude de remettre tout ce qui fait appel à la créativité, à la fin des études. Pendant **dix-sept** ans ou plus, un élève est une bête à concours, puis brusquement après qu'il ait passé suffisamment d'étapes, on lui demande de créer quelque chose d'original.

**B :** C'est vrai. Je doute qu'il y ait beaucoup d'originaux qui tiennent jusque là.

**A :** Oh, je ne sais pas. Peut-être sont ils assez originaux pour trouver le moyen d'apprécier le système. Comme celui de rentrer complètement dans le problème, comme nous le disions. Ça devrait rendre les cours traditionnels supportables, et peut-être même amusant.

**B :** Tu as toujours été optimiste. J'ai peur que tu ne voies les choses trop en rose. Regarde, la pluie s'est arrêtée. On n'a qu'à traîner cette Pierre jusqu'au campement et voir ce qu'il y a écrit dessus.

# 8 L'Addition

**A** : Les deux blocs s'emboîtent parfaitement. On dirait que nous avons maintenant tout le message. Qu'est-ce que ça dit ?

**B** : Cette partie est un peu plus dure à comprendre, il y a quelque mots obscurs, mais ça donne à peu près ceci :

> ... jour. Et Conway dit "Que les nombres s'additionnent entre eux selon la règle suivante : l'ensemble de gauche de la somme de deux nombres comprendra les somme de chaque nombre et des parties de gauche de l'autre nombre, et de la même manière, l'ensemble de droite se construira grâce aux parties de droite". Conway montra que tout nombre plus zéro est inchangé et il considéra que l'addition était bien. Il y eut un soir et un matin, puis vint le troisième jour.
>
> Puis Conway dit "Que le négatif d'un nombre ait pour ensembles les négatifs de ses ensembles opposés. Que la soustraction soit l'addition du 'négatif.'" Et il en fut ainsi. Conway prouva que la soustraction opposait l'addition et c'était très bien. Et il fut un soir et un matin et vint le quatrième jour.
>
> Et Conway dit aux nombres "Croissez et multipliez. Qu'une partie d'un nombre soit multipliée par un autre nombre, que le résultat soit ajouté au produit du premier nombre par un élément du second, et que le produit des parties en soit soustrait. Ceci pourra être fait de toutes les façons possibles, donnant une partie de gauche du produit quand les éléments sont de même sorte, et de droite quand les éléments sont de différentes sortes". Conway montra que tout nombre multiplié par un reste inchangé. Et il fut un soir et un matin et vint le cinquième jour.
>
> Alléluia ! Quand les nombres furent créés au bout d'un nombre infini de jours, l'univers lui-même apparut. Et il y fut un jour et un matin et vint le jour $\aleph$.
>
> Et Conway regarda toutes les lois qu'il avait créées pour les nombres et vit que c'était très très bien. Et il leur ordonna des signes, des séries, des quotients, des carrés.
>
> Alors, ils s'étalèrent jusqu'à un nombre infini inférieur a l'infinité. Et l'infinité des jours engendra une infinité d'infinités.

C'est tout.

**A** : Quelle fin étrange ! Et que signifie le "jour Aleph" ?

**B** : Aleph est une lettre hébraïque et on dirait qu'elle se tient seule sur ses jambes, regarde $\aleph$. Ça semble représenter l'infini. Je l'avoue c'est du charabia. Ça ne va pas être facile à comprendre.

**A :** Peux-tu tout retranscrire pendant que je prépare le dîner ? C'est trop long pour que je retienne tout, et je ne sais pas la lire...

**B :** Ok, ça m'aidera moi aussi à m'éclaircir les idées.

. . . . . . . . . . .

**A :** C'est curieux que les quatre nombres créés le Troisième Jour ne soient pas mentionnés. Je me demande encore comment Conway les a appelés.

**B :** Si nous appliquons les règles d'addition, de multiplication et de soustraction, nous pourrons peut-être trouver ce que sont ces nombres.

**A :** Ouais, seulement *si* nous arrivons d'abord à pouvons découvrir quelles sont ces règles. Voyons si nous pouvons représenter symboliquement la règle de l'addition pour voir ce qu'elle veut dire... Je suppose que "de même sorte" doit signifier que les éléments de gauche vont avec les éléments de gauche, et ceux de droite avec ceux de droite. Que penses tu de ceci :

$$x + y = ((X_G + y) \cup (Y_G + x), (Y_D + x) \cup (X_D + y)) . \qquad (3)$$

**B :** Je trouve ça horrible. Qu'est ce *ta* règle veut dire ?

**A :** Pour avoir l'ensemble de gauche de $x + y$, tu prends tous les nombres de la forme $x_G + y$ où $x_G$ est dans $X_G$, et tous les nombres $y_G + x$ où $y_G$ est dans $Y_G$. L'ensemble de droite se déduit des éléments de droite "de la même manière."

**B :** Je vois, une "partie de gauche" de $x$ est un élément de $X_G$. Ta définition symbolique semble en accord avec le texte.

**A :** Et cette définition a un sens puisque chaque $x_G + y$ et $x + y_G$ doit en principe être plus petit que $x + y$.

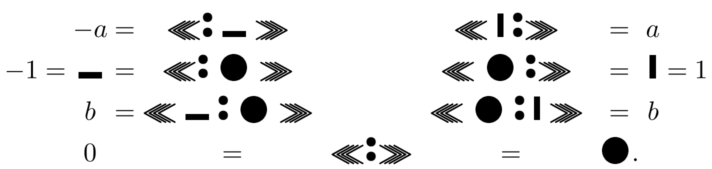
**B :** Ok. Essayons la pour voir comment ça marche. Je vois que tu l'as appelée la règle (3).

**A :** Voyons. Après le Troisième Jour, nous savons qu'il y a sept nombres différents que nous pouvons appeler : $0, 1, -1, a, b, c$, et $d$.

**B :** Non, je pense que nous pouvons utiliser la symétrie droite-gauche et les appeler :

$$-a < -1 < -b < 0 < b < 1 < a$$

où



**A** : Excellent ! Tu dois avoir raison puisque la loi suivante de Conway est

$$-x = (-X_D, -X_G). \tag{4}$$

**B** : C'est donc ça ! Bon, nous pouvons maintenant commencer à additionner ces nombres. Selon la règle (3), qu'est-ce que 1+1 ?

**A** : Occupe toi de ça. Moi, je cherche ce que vaut $1 + a$.

**B** : D'accord. Je trouve $(\{0 + 1, 0 + 1\}, \emptyset)$. Et $0 + 1$ est $(\{0 + 0\}, \emptyset)$, 0+0 est $(\emptyset, \emptyset) = 0$. Donc tout marche bien, on a :

$$1 + 1 = (\{1\}, \emptyset) = a.$$

Comme nous le pensions, $a$ doit être 2.

**A** : Félicitations. Tu viens de trouver la plus longue démonstration au monde que $1 + 1 = 2$.

**B** : Tu as déjà rencontré une démonstration plus courte ?

**A** : Pas vraiment. Regarde, tes calculs m'aident aussi. Je trouve $1 + 2 = (\{2\}, \emptyset)$, nombre qui n'est créé que le Quatrième Jour.

**B** : Je suggère de l'appeler "3".

**A** : Bravo. Alors, la règle (3) marche bien ! Vérifions que $b$ est bien $\frac{1}{2}$ en calculant $b + b$...

**B** : Hmm, c'est bizarre, on trouve $(\{b\}, \{b + 1\})$ qui n'a pas encore été créé.

**A** : Et $b + 1$ est $(\{b, 1\}, \{2\})$ qui est similaire à $(\{1\}, \{2\})$ créé le Quatrième Jour. Donc, $b + b$ apparaît le *Cinquième* Jour.

**B** : Ne me dis pas que $b + b$ est égal à un *autre* nombre dont on ne connaît pas le nom !

**A** : On est coincé ?

**B** : Nous avons élaboré une théorie qui nous permet de calculer tous les nombres créés, donc nous *devons* pouvoir le faire. Faisons un récapitulatif des quatre premiers jours.

**A** : Oh Bill, c'est trop compliqué.

**B** : Non, regarde, c'est un tableau tout simple.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jour 1 | | | | | | | | $0$ | | | | | | | |
| Jour 2 | | | | $-1$ | | | | | | | | $1$ | | | |
| Jour 3 | | $-2$ | | | | $-b$ | | | | $b$ | | | | $2$ | |
| Jour 4 | $-3$ | | $-(b+1)$ | | $-c$ | | $-d$ | | $d$ | | $c$ | | $b+1$ | | $3$ |
| ⋮ | | | | | | | | | | | | | | | |

**A :** Oh, je vois, donc $b+b$ est $(\{b\},\{b+1\})$ qui est formé de nombres *non adjacents...* Et notre théorie nous dit que de tous les nombres situés entre $b$ et $b+1$ le Cinquième Jour, $(\{b\},\{b+1\})$ est celui qui fut *créé en premier.*

**B :** (RAYONNANT) Et c'est 1, car 1 apparaît avant $c$.

**A :** Donc, $b$ est finalement $\frac{1}{2}$, bien qu'on ait eu besoin de deux jours pour trouver sa valeur. C'est incroyable ce qu'on peut prouver à partir de ces quelques règles. Elles sont si étroitement liées, c'est à devenir fou.

**B :** Je parie que $d$ vaut $\frac{1}{3}$, et $c$ $\frac{2}{3}$.

**A :** Le soleil va se coucher. Allons dormir Bill, nous avons tout notre temps et je suis vraiment lessivée.

**B :** (MARMONNANT) $d+c=\cdots$. Ok, d'accord. Bonne nuit.

## 9 La Réponse

**A :** Tu es déjà réveillé ?

**B :** Quelle nuit, bon sang ! Je n'ai pas arrêté de me tourner et de me retourner en réfléchissant à toutes sortes de trucs. J'ai rêvé que je démontrais des tas de choses et que je faisais des déductions logiques, mais quand je me suis réveillé, je me suis aperçu que ça ne tenait pas du tout debout.

**A :** Peut-être que toutes ces mathématiques ne sont pas bonnes pour nous après tout. On était si heureux hier...

**B :** (L'INTERROMPANT) Ouais, hier on planait, mais aujourd'hui ça tourne au vinaigre. Je ne peux pas m'empêcher d'y penser. Je ne pourrai pas me reposer tant qu'on n'aura pas trouvé d'autres résultats. Ou est le crayon ?

**A :** Bill, tu as besoin d'un bon petit déjeuner. Il y a des abricots et des figues par là.

**B :** D'accord, mais je *dois* me remettre au travail.

**A :** En fait, je suis moi aussi curieux de savoir ce qu'il en est, mais promets moi une chose.

**B :** Quoi ?

**A :** Nous travaillerons seulement sur l'addition et la soustraction aujourd'hui. *Pas* la multiplication ! Nous ne jetterons même pas un *coup d'œil* sur l'autre partie de la tablette.

**B :** D'accord. Je serais même d'avis de repousser l'étude de la multiplication à jamais. Ça a l'air si compliqué.

**A :** (L'EMBRASSANT) D'accord, maintenant calme toi.

**B :** (S'ÉTIRANT) Je ne sais pas ce que j'ai fait pour te mériter, Alice.

**A :** C'est mieux. La nuit dernière, je réfléchissais à la manière dont tu as résolu le problème de l'ensemble des nombres hier matin. Je pense qu'il y a un principe important que nous devons édifier en théorème. C'est que :

> (T8) Soit $y$ un nombre. Si $x$ est le premier nombre créé tel que $Y_G < x$ et $x < Y_D$, alors $x \equiv y$.

**B :** Hmm, je pense que c'est *bien* ce que nous avons démontré. Voyons si nous pouvons retrouver la démonstration, grâce au nouveau symbolisme. Si je me rappelle bien, nous avons construit le nombre $z = (Y_G \cup X_G, X_D \cup Y_D)$.

Nous avions alors $x \equiv z$ par (T7). D'un autre côté, aucun élément $x_G$ de $X_G$ ne satisfait $Y_G < x_G$ puisque $x_G$ a été créé avant $x$. Par conséquent chaque $x_G$ est $\leq$ à un des $y_G$ par (T4). Donc, $X_G < y$ et de même $y < X_D$. Donc, $y \equiv z$ par (T7). C'est facile maintenant de faire la démonstration puisque nous avons tous les éléments pour travailler.

**A** : Ce qui est bien avec le théorème (T8), c'est qu'il rend les calculs de la nuit dernière bien plus simples. Quand on a calculé $b + b = (\{b\}, \{b+1\})$ , on aurait pu voir tout de suite que 1 est le premier nombre créé situé entre $\{b\}$ et $\{b+1\}$.

**B** : Attends, je vais essayer d'appliquer ça à $c + c$. C'est le premier nombre créé entre $b + c$ et $1 + c$. Ben, ça doit être $b + 1$, c'est a dire $1\frac{1}{2}$. Donc, $c$ vaut $\frac{3}{4}$.

C'est marrant, j'aurais juré que c'était $\frac{2}{3}$.

**A** : Et $d$ vaut $\frac{1}{4}$.

**B** : Oui.

**A** : Je pense que le procédé général apparaît plus clairement maintenant. Au bout de quatre jours les nombres non négatifs sont :

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3.$$

Et au bout de 5 jours, ils seront sans doute. . .

**B** : (L'INTERROMPANT)

$$0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4.$$

**A** : Exact. Peux tu le montrer ?

**B** : . . .

Oui, mais pas aussi facilement que je ne le pensais. Par exemple, pour montrer que $f = (\{\frac{3}{2}\}, \{2\})$ vaut $\frac{7}{4}$, je calcule $f + f$. C'est le premier nombre créé entre 3 et 4, et je dois anticiper de quelques jours, pour trouver $\frac{7}{2}$. Je suis convaincu que nous avons le bon modèle, mais ce serait bien d'en avoir la preuve.

**A** : Le Quatrième Jour, on a calculé $\frac{3}{2}$ en sachant que c'était $1 + \frac{1}{2}$, et *non* en calculant $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$. Peut-être que c'est ça l'astuce : ajouter 1.

**B** : Voyons voir. D'après la définition (3), on a

$$1 + x = ((1 + X_G) \cup \{x\}, 1 + X_D)$$

en supposant que $0 + x = x$. En fait, on peut dire que..., mais bien sûr, pour les nombres positifs on peut toujours choisir $X_G$ tel que $1 + X_G$ possède un élément $\geq x$, donc ça se simplifie en :

$$1 + x \equiv (1 + X_G, 1 + X_D)$$

dans ce cas.

**A** **:** C'est ça, Bill ! Regarde les derniers huit nombres du Cinquième Jour, ils sont juste plus grand d'une unité que les huit nombres non négatifs du Quatrième Jour.

**B** **:** Ça marche parfaitement. Maintenant, il nous reste à montrer que notre modèle marche bien pour les nombres entre 0 et 1..., mais ça peut toujours se faire en calculant $x + x$, qui est inférieur à 2.

**A** **:** Oui. Je suis sûre maintenant que nous avons le bon modèle.

**B** **:** Quel soulagement d'un coup ! Je ne sens même pas besoin de formaliser la démonstration. Je *sais* que c'est juste.

**A** **:** Je me demande si notre règle des $1 + x$ n'est pas le cas particulier d'une règle plus générale telle que :

$$y + x \equiv (y + X_G, y + X_D).$$

Ça serait bien plus simple que la règle si compliquée de Conway.

**B** **:** Il semble logique de penser qu'ajouter $y$ ne fait que tout "décaler" de $y$ unités. Euh, non. Prends $x = 1$, ça voudrait dire que $y + 1 \equiv (\{y\}, \emptyset)$ ce qui est faux quand $y = \frac{1}{2}$.

**A** **:** Désolée. En fait ta règle des $1 + x$ ne marche pas non plus pour $x = 0$.

**B** **:** C'est vrai, je ne l'ai montrée que quand $x$ est positif.

**A** **:** Je pense que nous devrions regarder la règle (3) de l'addition de plus près pour voir ce que l'on peut en tirer de plus. Tout ce que nous avons, ce sont les *noms* des nombres. Ces noms sont corrects si les nombres de Conway se comportent comme les nombres habituels, mais nous ne savons pas si les règles de Conway et les règles usuelles sont les mêmes. En plus, je trouve ça rigolo de déduire tout un tas de nouveaux machins juste à partir de ces quelques règles de base.

**B** **:** Voyons. D'abord, l'addition est visiblement commutative, c'est à dire :

$$\text{(T9)} \qquad x + y = y + x.$$

**A :** Ouaip. Maintenant, tachons de montrer ce que prétendait Conway, c'est à dire :

$$\text{(T10)} \qquad x + 0 = x.$$

**B :** La règle donne

$$x + 0 = (X_G + 0, X_D + 0).$$

Ce qu'il faut faire, c'est encore une fois une récurrence sur le "jour de création". On suppose que $X_G + 0$ est égal à $X_G$, et que $X_D + 0$ est égal à $X_D$, puisque tous ces nombres ont été créés avant $x$. CQFD !

**A :** Mais, n'a-t-on pas montré que $x + 0 \equiv x$ et non $= x$ ?

**B :** Toi, tu cherches la petite bête, non ? Si tu veux, je peux modifier (T10), ça ne change pas grand chose. Mais en fait la démonstration dit que $x + 0$ et $x$ ont les mêmes ensembles, non ?

**A :** Tu as raison, excuse moi.

**B :** Ça fait dix théorèmes, on continue tant qu'on est chaud ?

# 10 Les Théorèmes

**A :** Et la loi d'associativité ?

$$\text{(T11)} \qquad (x+y)+z = x+(y+z).$$

**B :** Je doute qu'on s'en serve. Ça n'intervient pas dans les calculs. Mais ça ne nous ferait pas de mal d'essayer. Mes profs de math ont toujours dit que c'était quelque chose de bien. Alors, allons-y pour l'associativité. Peux tu me trouver la définition ?

**A :**

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= (((X_G+y)+z)\cup((Y_G+x)+z)\cup(Z_G+(x+y)),\\
&\quad ((X_D+y)+z)\cup((Y_D+x)+z)\cup(Z_D+(x+y)))\\
x+(y+z) &= ((X_G+(y+z))\cup((Y_G+z)+x)\cup((Z_G+y)+x),\\
&\quad (X_D+(y+z))\cup((Y_D+z)+x)\cup((Z_D+y)+x))\,.
\end{aligned}$$

**B :** Tu es vraiment forte pour toutes ces formules bestiales. Mais comment prouver que ces deux choses monstrueuses sont égales.

**A :** Ça n'est pas si dur. Il suffit de faire une démonstration pas récurrence sur les sommes des jours, comme auparavant. Regarde $(X_G+y)+z = X_G+(y+z)$ car la somme des jours de création de $(x_G, y, z)$ est strictement inférieure à celle de $(x, y, z)$, et on raisonne par récurrence. Pour les cinq autres ensembles, on fait de même en utilisant la commutativité.

**B :** Félicitations ! Encore une fois c'est ce qu'il fallait démontrer. Et en plus on a bien $=$ et pas $\equiv$.

**A :** Le signe $\equiv$ m'inquiète un peu Bill. On a montré qu'on pouvait substituer des éléments identiques pour $<$ et $\leq$, mais on doit aussi le vérifier pour l'addition. C'est à dire :

$$\text{(T12)} \qquad \text{Si } x \equiv y, \text{ alors } x+z \equiv y+z.$$

**B :** Je suppose que c'est vrai, sinon on ne serait pas autorisés à faire les simplifications qu'on a effectuées pour les nombres. Tant qu'à faire une démonstration, autant la faire correctement.

**A :** En fait, on peut essayer de montrer un résultat plus fort qui est :

$$\text{(T13)} \qquad \text{Si } x \leq y, \text{ alors } x+z \leq y+z$$

car ça prouverait tout de suite (T12).

**B :** Je vois. Parce que $x \equiv y$ si et seulement si $x \leq y$ et $y \leq x$. De plus, (T13) me semble un résultat très utile. Est-ce qu'on ne pourrait pas prouver quelque chose d'encore plus fort :

Si $x \leq y$ et $w \leq z$, alors $x + w \leq y + z$ ?

**A :** Oh, ça découle de (T13) puisque

$$x + w \leq y + w = w + y \leq z + y = y + z.$$

**B :** C'est vrai, (T13) est meilleur parce que plus simple. Eh bien, ma chère experte en formules, à quoi (T13) est il équivalent ?

**A :** On sait que $X_G < y$ et $x < Y_D$. On doit montrer que $X_G + z < y + z$, $Z_G + x < y + z$, $x + z < Y_D + z$, et $x + z < Z_D + y$.

**B :** Une autre preuve par récurrence ? Ça devient vraiment trop facile !

**A :** Pas si facile que ça mon vieux ! Je crains que la récurrence ne nous donne que $X_G + z \leq y + z$, etc... Il se pourrait que $x_G < y$ mais que $x_G + z \equiv y + z$.

**B :** Oui, c'est intéressant. Nous avons besoin de la réciproque.

(T14) Si $x + z \leq y + z$, alors $x \leq y$.

**A :** Génial ! La réciproque est équivalente à ceci : Supposons que $X_G + z < y + z$, $Z_G + x < y + z$, $x + z < Y_D + z$, et $x + z < Z_D + y$, prouver que $X_G < y$ et $x < Y_D$.

**B :** Hmm. La réciproque doit pouvoir se démontrer par récurrence si ce n'est que nous pourrions avoir, disons $x_G + z < y + z$ et en même temps $x_G \equiv y$. Ce genre de cas devrait pouvoir se résoudre par (T13), mais...

**A :** Mais on a besoin de (T13) pour montrer (T14), et de (T14) pour montrer (T13). Et de (T13) pour montrer (T12).

**B :** On tourne en rond.

**A :** Ah, mais on peut s'en sortir. Il suffit de montrer les deux *ensembles* ! On peut montrer le résultat "(T13) et (T14)" par récurrence sur la somme des jours de création de $(x, y, z)$.

**B :** (RADIEUX) Alice, tu es géniale ! Belle, séduisante, et géniale !

**A :** Allons, allons, nous avons encore beaucoup à faire. On devrait montrer que :

(T15) $x - x \equiv 0$.

**B** : C'est quoi ce signe "moins" ? Nous n'avons jamais exprimé la règle de soustraction de Conway.

**A** :

(5) $$x - y = x + (-y).$$

**B** : Tu as utilisé le signe $\equiv$ dans (T15)... Oui, c'est clair que $x + (-x)$ ne sera identiquement égal à 0, c'est à dire, avec des ensembles vide à droite et à gauche, que si $x$ est égal à 0.

**A** : Les règles (3), (4), et (5) montrent que (T15) est équivalent à

$$((X_G + (-x)) \cup ((-X_D) + x), (X_D + (-x)) \cup ((-X_G) + x)) \equiv 0.$$

**B** : Hmm, ça semble difficile. Comment montre-t-on que quelque chose est $\equiv 0$. D'après (T8), $y \equiv 0$ si et seulement si $Y_G < 0$ et $0 < Y_D$ puisque 0 est le tout premier nombre créé.

**A** : La même conclusion découle de la règle (2). On a $y \leq 0$ si et seulement si $Y_G < 0$, et $y \geq 0$ si et seulement si $0 < Y_D$. Donc, nous devons montrer que

$$\begin{array}{rlllll} & x_G + (-x) & < & 0 & \text{et} & (-x_D) + x < 0 \\ \text{et} & x_D + (-x) & > & 0 & \text{et} & (-x_G) + x > 0 \end{array}$$

pour tous les $x_G$ de $X_G$ et les $x_D$ de $X_D$.

**B** : Hmm. Peut-on supposer que $x_G + (-x_G) \equiv 0$ et $x_D + (-x_D) \equiv 0$ ?

**A** : Oui, puisqu'on peut montrer (T15) par récurrence.

**B** : Alors, j'ai trouvé ! Si $x_G + (-x)$ était $\geq 0$, alors $(-X)_D + x_G$ serait $> 0$ par définition. Mais $(-x_G) + x_G$ n'est pas $> 0$. En conclusion, $x_G + (-x)$ doit être $< 0$ et la même technique s'applique aux autres cas.

**A** : Bravo ! Ça prouve (T15).

**B** : Quoi d'autre ?

**A** : Que penses-tu de ça :

(T16) $$-(-x) = x.$$

**B** : Ssss... Trivial.

**A** : Il y a bien le théorème de Conway.

(T17) $$(x + y) - y \equiv x.$$

**B** : C'est équivalent à quoi ?

**A :** C'est sacrément compliqué… On ne pourrait pas prouver les choses sans avoir à toujours revenir aux définitions ?

**B :** Ah ! Ça coule de source :

$$\begin{array}{rcll} (x+y)-y & = & (x+y)+(-y) & \text{d'après (5)} \\ & = & x+(y+(-y)) & \text{d'après (T11)} \\ & = & x+(y-y) & \text{d'après (5)} \\ & \equiv & x+0 & \text{d'après (T12) et (T15)} \\ & = & x & \text{d'après (T10).} \end{array}$$

On a trouvé un tas de résultats utiles. Même la loi d'associativité nous a servi. Merci de l'avoir proposée, contre mon gré.

**A :** Bon, on a probablement épuisé toutes les possibilités de l'addition, de la négation, et de la soustraction. Il y a encore quelques trucs qu'on pourrait démontrer, par exemple :

(T18) $-(x+y) = (-x)+(-y)$.
(T19) Si $x \leq y$, alors $-y \leq -x$.

Mais je ne crois pas qu'elles contiennent des idées nouvelles. Donc, il n'y a plus grand intérêt à les démontrer avant d'en avoir besoin.

**B :** Dix-neuf théorèmes à partir de quelques lois.

**A :** Maintenant, rappelle-toi ta promesse. Cet après-midi, on laisse tomber les maths sans même lire le reste de la Pierre. Je ne veux pas que cette horrible multiplication t'empêche encore de dormir.

**B :** On a fait du bon travail aujourd'hui. Tous les problèmes sont résolus. Regarde la marée montante. Le dernier à l'eau prépare la bouffe.

## 11 La déclaration

**A :** Vraiment, tu as cuisiné un dîner super.

**B :** (S'ALLONGEANT À CÔTÉ D'ELLE) C'est surtout grâce au poisson frais que tu as attrapé.

A quoi penses-tu en ce moment ?

**A :** (ROUGISSANT) A vrai dire, et bien je me demandais ce qui se passerait si j'étais enceinte.

**B :** Tu veux dire qu'on est tout près du croissant fertile et que...

**A :** Très marrant. Et après tout ce travail pour montrer que 1+1=2 nous allons découvrir que 1+1=3.

**B :** Tu as gagné, j'arrête mes vannes stupides. Mais si tu y penses, les règles de Conway sur les nombres, c'est juste comme la copulation, l'ensemble de gauche rencontre l'ensemble de droite et ...

**A :** Tu ne penses qu'à une chose, ou plutôt deux choses. Mais sérieusement, que ferions nous si j'étais vraiment enceinte ?

**B :** Et bien, je pense qu'il faudrait rentrer à la maison tout de suite, on n'a presque plus d'argent et il commence à faire un sale temps.

Dans tous les cas, je veux vraiment t'épouser, que tu sois enceinte ou pas. Si tu es d'accord, bien sûr.

**A :** Bien sûr, je suis d'accord. Je ressens tout à fait la même chose. Ce voyage a prouvé que nous sommes prêts à rester ensemble.

Je me demande... Quand nos enfants grandiront, nous leur apprendrons notre théorie des nombres ?

**B :** Non, ce serait beaucoup plus marrant pour eux de la découvrir par eux-même.

**A :** Mais les gens ne peuvent pas *tout* découvrir par eux-même, il faut qu'il y ait un juste milieu.

**B :** Le processus de l'apprentissage n'est il pas en fait celui d'une découverte par soi-même ? Est-ce que les professeurs n'encouragent pas leurs élèves à réfléchir par eux-même ?

**A :** Dans un sens oui. Ouh là là... on devient philosophe.

**B :** J'en reviens pas de me sentir si bien quand je me mets à ces mathématiques folles. Ça me rend tout excité alors qu'avant je les détestais.

**A :** Moi aussi ça me fait flipper. A mon avis, c'est beaucoup mieux que la came ! Le cerveau est naturellement en état de stimulation.

**B :** Aussi, c'est pas mal du côté aphrodisiaque.

**A :** (CONTEMPLANT LES ÉTOILES) Ce qui est bien avec les mathématiques pures, c'est que tout ce qu'on a démontré aujourd'hui ne servira jamais à rien, donc personne ne pourra jamais l'utiliser pour faire des bombes ou des trucs comme ça.

**B :** Ouais. Mais on ne peut pas non plus rester enfermer dans notre tour d'ivoire. Il y a beaucoup de problèmes dans le monde, et de bonnes maths peuvent aider à les résoudre. Tu sais, ça fait longtemps qu'on s'est coupés des journaux, on a oublié tous les problèmes.

**A :** Oui, je me sens parfois un peu coupable à ce sujet...

Peut-être que le bon type de mathématiques pourrait permettre de résoudre certains de ces problèmes, mais j'ai peur que ça ne soit aussi mal utilisé.

**B :** C'est le paradoxe et le dilemme. On ne peut rien faire sans outils, mais les outils peuvent être utilisés pour de mauvaises choses comme pour les bonnes. Si on arrête de créer des choses parce qu'elles peuvent être dangereuses dans de mauvaises mains, alors on arrête aussi de faire des choses utiles.

**A :** Bon, je t'accorde que les mathématiques pures ne sont pas la solution à tout. Mais vas tu les abolir d'un seul coup parce qu'elles ne résolvent pas les problèmes du monde.

**B :** Non, non, tu ne me comprends pas. Ces quelques jours m'ont montré que les mathématiques pures sont belles. C'est une forme d'art comme la poésie, la peinture, ou la musique, et ça m'excite. Notre curiosité naturelle doit être satisfaite. Ça nous détruirait si on ne pouvait pas s'amuser de temps en temps, même au milieu de l'adversité.

**A :** Bill, j'aime tellement discuter avec toi comme ça.

**B :** Moi aussi. Je me sens si près de toi, et si calme.

## 12 Le Désastre

**B** : Tu es déjà réveillée !

**A** : Je me suis réveillée il y a environ une heure, et j'ai réalisé qu'il y a un gros trou béant dans ce que nous pensions avoir prouvé hier.

**B** : Pas possible !

**A** : J'en ai bien peur. Nous avons oublié de montrer que $x+y$ est un *nombre.*

**B** : Tu rigoles ? Bien sûr que c'est un nombre, c'est la somme de deux nombres. Oh... je vois, il nous faut montrer que la règle (1) est satisfaite.

**A** : Oui, la définition de l'addition n'est légitime que si nous prouvons que $X_G+y < X_D+y$ et $X_G+y < Y_D+x$ et $Y_G+x < X_D+y$ et $Y_G+x < Y_D+x$.

**B** : Cela doit découler de (T13) et (T14), mais... je vois ce que tu veux dire, nous avons montré (T13) et (T14) en supposant que la somme de deux nombres est un nombre. Mais comment as-tu pu penser à ce problème ?

**A** : En fait, c'est intéressant. Je me demandais ce qui se passerait si on définissait l'addition de la façon suivante :

$$x \oplus y = (X_G \oplus Y_G, X_D \oplus Y_D).$$

Je l'appelle $\oplus$ au départ car je ne suis pas sûr de retomber sur $+$. Mais c'est assez facile de montrer que $\oplus$ est une opération commutative et associative, et je voulais voir ce que cette opération donnait.

**B** : Je vois. La somme de $x$ et $y$ est comprise entre $X_G+Y_G$ et $X_D+Y_D$, donc cette définition pourrait être plus simple que celle de Conway.

**A** : Mais j'ai été vite déçue, quand j'ai découvert que

$$0 \oplus x = 0$$

pour tout $x$.

**B** : Aie ! Peut-être que $\oplus$ est la multiplication.

**A** : Puis, j'ai montré que $1 \oplus x = 1$ pour tout $x > 0$, et $2 \oplus x = 2$ pour tout $x > 1$, et $3 \oplus x = 3$ pour tout $x > 2$ et ...

**B** : Je vois. Pour tous les entiers positifs $m$ et $n$, $m \oplus n$ est le *minimum* de $m$ et $n$. C'est commutatif et associatif. Donc, ton opération $\oplus$ est *vraiment* intéressante. Bon.

**A** : Oui, on a $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Mais quand j'ai essayé $(-\frac{1}{2}) \oplus \frac{1}{2}$ j'ai été soudain bloqué.

**B** : Tu veux dire... Je vois : $(-\frac{1}{2}) \oplus \frac{1}{2} = (\{(-1) \oplus 0\}, \{0 \oplus 1\})$ qui est $(\{0\}, \{0\})$.

**A** : Et ce n'est *pas* un nombre. Ça ne colle pas avec la règle (1).

**B** : Donc, ta définition de $\oplus$ n'est pas légitime.

**A** : Je réalise maintenant que tu ne peux pas juste créer des définitions arbitrairement. Elles doivent être en cohérence avec les autres règles. Un autre problème de $\oplus$, par exemple, c'est que $(\{-1\}, \emptyset) \equiv 0$, mais $(\{-1\}, \emptyset) \oplus 1 \not\equiv 0 \oplus 1$.

**B** : Bon, $\oplus$ est éliminée, mais je pense quand même que l'on peut arranger la *véritable* définition de $+$.

**A** : Je ne sais pas, je t'ai dit tout ce que je sais, si ce n'est sur les *pseudo-nombres.*

**B** : Pseudo-nombres ?

**A** : Supposons que l'on forme $(X_G, X_D)$ où $X_G$ n'est pas nécessairement $< X_D$. Alors, la règle (2) peut toujours être utilisée pour définir la relation $\leq$ entre ces pseudo-nombres.

**B** : Je vois... par exemple $(\{1\}, \{0\})$ se trouve être inférieur à 2.

**A** : Exactement. Je viens juste de remarquer que notre démonstration de la *transitivité* (T1) n'utilisait pas la partie $\not\geq$ de la règle (1). Donc, elle marche aussi pour les pseudo-nombres.

**B** : Oui, je me souviens avoir dit que jusqu'à (T2), on n'utilisait pas complètement la règle (1). Ça me semble loin tout ça.

**A** : Attends-toi à un choc. Le pseudo-nombre $(\{1\}, \{0\})$ n'est ni $\leq 0$ ni $\geq 0$ !

**B** : Quoi !

**A** : Oui. Je pense pouvoir prouver que $(\{1\}, \{0\})$ est $\leq$ à un nombre $y$ si et seulement si $y > 1$, et $\geq$ à un nombre $x$ si et seulement si $x < 0$. Il n'est pas du tout en relation avec un nombre quelconque entre 0 et 1.

**B** : Ou est le crayon ? Je veux vérifier ça... Je pense que tu as raison. C'est super, on prouve des relations entre des quantités qui n'existent même pas.

**A** : En quoi les pseudo-nombres existent-ils moins que les nombres de Conway ? Ce que tu veux dire, c'est que nous prouvons des choses sur des quantités qui sont purement conceptuelles, sans support dans le monde réel, comme aide à la compréhension. Souviens toi que $\sqrt{-1}$ était au départ considéré comme un nombre "imaginaire", et $\sqrt{2}$ n'était même pas "rationnel".

**B** : La règle de Conway pour additionner des nombres normaux nous donne aussi un moyen d'additionner des pseudo-nombres. Je me demande où cela nous mène.

Si $x = (\{1\}, \{0\})$, alors $1 + x$ est ... $(\{2\}, \{1\})$.

**A** : Et $x + x$ est $(\{1 + x\}, \{x\})$ un pseudo-nombre du second ordre. Pseudo-pseudo-nombre ?

**B** : Les mathématiques pures sont vraiment une ouverture pour l'esprit. As-tu remarqué que $(\{1\}, \{0\})$ n'est même pas $\leq$ à lui-même ?

**A** : Voyons, $x \leq x$ signifie que $X_G < x < X_D$, donc cela pourrait être vrai seulement si $X_G < X_D$.

Non, attends, on ne peut pas utiliser "$<$" à la place de "$\ngeq$" pour les pseudo-nombres, puisque (T4) n'est pas vraie de façon générale. Il faut revenir à la règle générale (2), qui dit que $x \leq x$ si et seulement si $X_G \ngeq x$ et $x \ngeq X_D$. Donc, $(\{1\}, \{0\})$ *est* $\leq$ à lui-même.

**B** : *Touché* ! Je suis content de m'être trompé, puisque tout $x$ doit être similaire à lui-même, même quand c'est un pseudo-nombre.

**A** : Peut-être y a-t-il un pseudo-nombre plus compliqué qui n'est pas inférieur ou similaire à lui-même. C'est difficile à imaginer car les ensembles $X_G$ et $X_D$ peuvent aussi contenir des pseudo-nombres.

**B** : Revenons à notre démonstration de (T3), et voyons si elle tient toujours.

**A** : Bonne idée... Eh, la même démonstration marche pour tous les pseudo-nombres. $x$ est *toujours* similaire à $x$.

**B** : C'est super, mais j'ai peur que cela nous amène loin de notre problème principal, à savoir, si $+$ est oui ou non correctement définie.

**A** : Et bien, nos preuves que $x+y = y+x$, $x+0 = x$ et aussi la loi d'associativité marchent pour les pseudo-nombres aussi bien que pour les nombres. Si les théorèmes des inégalités (T13) et (T14) marchent aussi pour les pseudo-nombres, alors $+$ sera correctement définie.

**B** : Je vois, c'est splendide. Pour l'instant on a établi (T1), (T3), (T5), (T6), (T9), (T10), et (T11) pour tous les pseudo-nombres. Regardons (T13) maintenant.

**A** : Mais, j'ai peur que... Oh, Bill ! Nous avons été trop naïfs hier, en acceptant cette démonstration sur la somme des jours pour (T13) et (T14), c'était trop beau pour être vrai.

**B** : Qu'est-ce que tu veux dire ?

**A :** Nous prouvions que $Z_G + x < y + z$ par récurrence, non ? Pour cela, il faut deux étapes, d'abord $Z_G \leq Z_G + y$ et puis $Z_G + y < z + y$. La récurrence nous donne correctement la première partie, mais la seconde partie met en jeu $(z_G, z, y)$ qui peut avoir une somme des jours supérieure à $(x, y, z)$.

**B :** Alors, on s'est planté ! Conway aurait honte de nous !

**A :** Heureusement qu'on n'a pas vu ça hier, ça aurait gâché notre journée.

**B :** Je suppose qu'il faut tout reprendre. Mais d'abord, allons *quand même* prendre le petit déjeuner...

## 13 Le Sauvetage

**A :** Nous avons sauté le déjeuner, Bill.

**B :** (MARCHANT NERVEUSEMENT) Vraiment ? Ce problème stupide me rend fou.

**A :** De toute manière, ça ne sert à rien de continuer à contempler cette feuille. Nous avons besoin d'une pause. Peut-être que si nous mangions quelque chose...

**B :** Ce dont nous avons vraiment besoin, c'est d'une idée nouvelle. Donne moi une idée, Alice.

**A :** (COMMENÇANT À MANGER) Bon, quand on tournait en rond l'autre fois, comment en sommes nous sortis ? C'était surtout en utilisant la récurrence. C'est à dire que la démonstration dans un cas, dépendait de celle d'un cas *précédent*, qui dépendait elle même d'un cas précédent, ainsi de suite, la chaîne devant au bout du compte se terminer.

**B :** Comme notre démonstration sur la somme des jours.

**A :** Exactement. L'autre manière de se sortir du cercle, c'était de prouver plus que nécessaire. Pour que la récurrence puisse continuer, il fallait prouver plusieurs choses simultanément.

**B :** C'est ce que tu as fait en combinant (T13) et (T14). Ok, Alice, juste après manger, j'écrirai tranquillement tout le schéma, tout ce que nous voulons démontrer, et peut-être plus. Et j'essaierai de montrer tout par récurrence du même coup. Le rouleau compresseur est en marche. Si ça ne marche pas, rien ne marchera.

**A :** Ça semble ardu, mais c'est probablement la meilleure méthode. Tiens, prends des gâteaux.

. . . . . . . . . . .

**B :** Allez. On y va. Nous voulons montrer trois choses sur les nombres, et elles semblent toutes dépendre l'une de l'autre.

**I :** $x + y$ est un nombre.

**II :** Si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$.

**III :** Si $x + z \leq y + z$, alors $x \leq y$.

Maintenant, si je ne me trompe pas, la preuve de $\mathbf{I}(x, y)$ découlera naturellement si on montre d'abord :

$\mathbf{I}(x_G, y), \quad \mathbf{I}(x, y_G), \quad \mathbf{I}(x_D, y), \quad \mathbf{I}(x, y_D)$
$\mathbf{III}(x_D, x_G, y)$
$\mathbf{III}(x, x_G, y), \quad \mathbf{II}(y, y_D, x)$
$\mathbf{III}(y, y_G, x), \quad \mathbf{II}(x, x_D, y)$
$\mathbf{III}(y_D, y_G, x).$

Par exemple, nous devons entre autres montrer que $X_G + y < Y_D + x$. En d'autre mots, pour tout $x_G$ de $X_G$ et $y_D$ et $Y_D$, il faut tout d'abord montrer que $x_G + y < y_D + x$. Mais (T3) et la contraposée de $\mathbf{III}(x, x_G, y)$ montrent que $x_G + y < x + y$, et $\mathbf{II}(y, y_D, x)$ montre que $y + x \leq y_D + x$. (T5) nous donne ensuite $x_G + y < y_D + x$. D'accord ?

**A :** Ça se présente bien, mais je ne comprends pas pourquoi tu as inclu les quatre premières : $\mathbf{I}(x_G, y)$, $\mathbf{I}(x, y_G)$, $\mathbf{I}(x_D, y)$, $\mathbf{I}(x, y_D)$. Même si $x_G + y$ n'était pas un nombre, ça ne serait pas un problème. Tout ce que nous voulons savoir, c'est que $x_G$ et $y$ sont eux-même des nombres. Après tout, $<$ et $\leq$ sont définis pour les pseudo-nombres, et les règles de transitivité marchent aussi.

**B :** Non, la règle (1) dit que les éléments de l'ensemble de gauche (tel que $x_G + y$) doivent être des nombres. De toute manière, ce n'est pas vraiment important parce que si nous prouvons $\mathbf{I}(x, y)$, nous pouvons admettre $\mathbf{I}(x_G, y)$ sans problème. La récurrence s'en charge.

**A :** C'est compliqué, mais continue, ça s'annonce bien.

**B :** Ça *doit* marcher ou nous sommes foutus. Bon, la démonstration de $\mathbf{II}(x, y, z)$, c'est à dire (T13), s'ensuivra si nous montrons :

$\mathbf{III}(y, x_G, z)$
$\mathbf{II}(x, y, z_G), \quad \mathbf{III}(z, z_G, y)$
$\mathbf{III}(y_D, x, z)$
$\mathbf{II}(x, y, z_D), \quad \mathbf{III}(z_D, z, x)$

C'est bizarre, ici on n'a *pas* besoin de $\mathbf{I}(x, y)$ . Comment se fait-il que nous pensions avoir besoin de montrer que la somme de deux nombres est un nombres, avant de montrer (T13) ?

**A :** C'était avant de savoir quoi que ce soit sur les pseudo-nombres. C'est marrant comme une idée fixe peut devenir un barrage. Tu te souviens ? C'était la première raison pour laquelle nous pensions que ce serait difficile de montrer que $x + y$ est un nombre parce que nous pensions que (T13) en dépendait. Après avoir appris que les pseudo-nombres respectaient la transitivité, nous avons oublié de reconsidérer notre source d'ennuis.

**B :** Alors, cette méthode du grand schéma nous mène quand même quelque part. Au moins, elle nous aide à réorganiser nos idées. Maintenant, la plus grande partie du chemin est faite. La démonstration de **III**(x,y,z) dépend de :

$$\mathbf{II}(y, x_G, z)$$
$$\mathbf{II}(y_D, x, z)$$

**A :** Encore une fois, on n'a pas besoin de $\mathbf{I}(x, y)$. Donc, on peut montrer (T13) et (T14) sans se préoccuper du fait que $x + y$ est un nombre.

**B :** Je vois, et plus tard $x+y$ s'avèrera être un nombre, grâce à (T13) et (T14). Super !

**A :** Maintenant **II** et **III** dépendent l'une de l'autre, donc on peut les combiner en une seule proposition, comme avant.

**B :** Tout juste. Voyons, si $\mathbf{IV}(x, y, z)$ représente les deux propositions combinées : $\mathbf{II}(x, y, z)$ et $\mathbf{III}(x, y, z)$, mes listes montrent que $\mathbf{IV}(x, y, z)$ dépend de :

$$\mathbf{IV}(y, x_G, z), \quad \mathbf{IV}(x, y, z_G), \quad \mathbf{IV}(z, z_G, y)$$
$$\mathbf{IV}(y_D, x, z), \quad \mathbf{IV}(x, y, z_D), \quad \mathbf{IV}(z_D, z, x).$$

Je pense que cette nouvelle notation est une bonne chose, comme $\mathbf{I}(x, y)$ et le reste. Les propriétés deviennent en effet plus claires. Maintenant, tout ce qu'il nous reste à faire, c'est de trouver un moyen de construire une hypothèse de récurrence qui aille de ces six trucs à **IV**(x,y,z).

**A :** Mais... ça ne marche pas. Regarde $\mathbf{IV}(x, y, z)$ dépend de $\mathbf{IV}(z, z_G, y)$ qui dépend de $\mathbf{IV}(y_D, y, z)$ qui dépend encore de $\mathbf{IV}(z, z_G, y)$. On est dans un cercle vicieux. C'est le même problème stupide que j'ai remarqué la première fois, et maintenant on sait qu'il est critique.

**B :** (TRÉPIGNANT) *On non !* Bon, je vais encore essayer une dernière chose avant d'abandonner. Refaisons le chemin en essayant de montrer une version plus générale de (T13).

**V :** Si $x \leq x'$ et $y \leq y'$, alors $x + y \leq x' + y'$.

C'est ce que nous utilisons vraiment dans nos démonstrations, et pas les deux étapes avec (T13). De plus, c'est symétrique. Ça pourra être utile.

**A :** Nous aurons aussi besoin de la réciproque, généralisant (T14).

**B :** Je pense que ce dont nous avons besoin, c'est de :

**VI :** Si $x + y \geq x' + y'$ et $y \leq y'$, alors $x \geq x'$.

**A :** Ta notation avec les primes et tout, ça fait très pro.

**B :** (SE CONCENTRANT) Merci. Maintenant, la démonstration de **V**(x,x',y,y') dépend de :

$$\mathbf{VI}(x_G, x', y, y')$$
$$\mathbf{VI}(y_G, y', x, x')$$
$$\mathbf{VI}(x, x'_D, y, y')$$
$$\mathbf{VI}(y, y'_D, x, x').$$

Hé, c'est en fait plus facile que tout à l'heure. La symétrie aide. Finalement, pour montrer $\mathbf{VI}(x, x', y, y')$, il faut… ce suspense me tue, je n'arrive plus a réfléchir…

$$\mathbf{V}(x, x'_G, y, y')$$
$$\mathbf{V}(x_D, x, y, y').$$

**A :** (BONDISSANT) Regarde, une récurrence sur la *somme des jours* appliquée à la combinaison de **V** et **VI** permet de finir !

**B :** (L'ENLAÇANT) On a gagné !

**A :** Bill, je peux difficilement y croire, mais notre démonstration de ces deux propositions marche en fait pour tous les *pseudo-nombres* $x$, $x'$, $y$, et $y'$ !

**B :** Alice, ça a demandé beaucoup de travail, mais c'est la plus belle chose que j'aie jamais vue.

**A :** Oui, on a dépensé beaucoup d'énergie sur ce qu'on avait en fait supposé évident, hier.

Je me demande si Conway lui-même avait une façon plus simple de démontrer ces lois. Peut-être que oui, mais même dans ce cas j'aime notre démonstration parce qu'elle nous apprend beaucoup sur les techniques de démonstrations.

**B :** Aujourd'hui, on devait en fait étudier la multiplication.

**A :** Il vaut mieux ne pas commencer maintenant, ou nous perdrions encore le sommeil. On peut passer le reste de l'après-midi à montrer que $-x$ est un nombre lorsque $x$ est un nombre.

**B :** Bonne idée, ça doit être facile maintenant. Je me demande si on peut prouver quelque chose sur la façon dont la négation agit sur les pseudo-nombres.

## 14 L'Univers

**B :** (S'ÉTIRANT) Bonjour, mon amour. Tu as réfléchi cette nuit à d'autres possibles erreurs dans nos raisonnements ?

**A :** Non, non... et toi ?

**B :** Tu *sais* que je ne cherche jamais les erreurs. Mais quelque chose me tracasse cependant : en fait, nous sommes censés avoir des règles pour créer tous les nombres possibles, et cependant $\frac{1}{3}$ n'est jamais apparu. Rappelle toi, je croyais qu'il apparaissait le Quatrième Jour, mais en fait c'était pas lui, c'était $\frac{1}{4}$. Je me suis dit que $\frac{1}{3}$ était un peu lent à venir, mais qu'il arriverait tôt ou tard. Mais ce qui m'ennuie, c'est que nous avons étudié *tous* les nombres, et que $\frac{1}{3}$ n'apparaît toujours pas.

**A :** Tous les nombres qu'on a crées ont une représentation finie dans le système binaire. Par exemple : $3\frac{5}{8} = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 11,101$ en binaire. Et réciproquement, tous les nombres qui ont une représentation finie en binaire *doivent* être crées tôt ou tard. $3\frac{5}{8}$a été créé le huitième jour, tu vois.

**B :** Les nombres binaires sont utilisés sur les ordinateurs. Peut-être que Conway voulait créer un monde pour les ordinateurs...

Et quelle est la représentation binaire de $\frac{1}{3}$ ?

**A :** J'en sais rien, mais il doit en avoir une !

**B :** Oh, je m'en souviens, tu fais une sorte de longue division, mais en base 2 au lieu de la base 10. Voyons voir... j'obtiens :

$$\frac{1}{3} = 0,0101010101\cdots$$

etc. jusqu'à l'infini. Ça ne se termine pas. Voila pourquoi il n'est pas créé.

**A :** "Jusqu'à l'infini"... Ça me rappelle la dernière partie de l'inscription sur la Pierre. Que crois tu qu'elle veuille dire quand elle parle du jour $\aleph$ ?

**B :** Ça ressemble à un louange métaphysique ou religieux à l'égard du système des nombres. C'est typique des textes anciens. D'un autre côté, ça semble étrange que Conway ait continué à être là, et à créer, après un nombre infini de jours. "Jusqu'à la fin des temps", dit la Pierre, mais le temps ne s'est pas encore arrêté.

**A :** T'es en forme aujourd'hui, mon grand.

**B :** Après un nombre infini de jours, je suppose que Conway regarda tous les nombres binaires qu'il avait crées, et... Argh ! Il ne s'est *pas* arrêté là, bon sang !

**A** : Mais oui ! Je n'y avais jamais songé, mais la Pierre nous dit qu'il a encore continué. Et bien sûr, il a obtenu d'autre nombres, car pour la première fois il a pu choisir des ensembles infinis pour $X_G$ et $X_D$ !

**B** : Peut-être le temps ne suit il pas vraiment un cours régulier. Peut être que pour nous, les jours semblent tous de la même longueur, mais que pour Conway, ils sont de plus en plus courts, sur l'échelle céleste du temps. Ainsi, le premier jour dura un jour céleste, mais le second jour terrestre dura un demi jour céleste, et le suivant un quart de jour, etc... Ce qui fait qu'après un total de deux jours célestes, Bingo ! Une infinité de jours terrestres étaient passés, et Conway fut prêt à continuer.

**A** : Je n'y ai jamais pensé, mais c'est fort possible. Dans un sens, on est désormais exactement dans la position de Conway après une infinité de jours terrestres, car nous *connaissons* réellement tout ce qui s'est passé, jusqu'au jour $\aleph$.

**B** : (EN GESTICULANT) *Encore* une gloire des mathématiques : notre esprit fini peut comprendre l'infini.

**A** : Du moins l'infini dénombrable.

**B** : Mais les nombres réels sont non dénombrables, et nous pouvons aussi les comprendre.

**A** : Je suppose que c'est vrai, puisque tout nombre réel a juste une écriture décimale infinie.

**B** : Ou une écriture binaire.

**A** : Eh ! Je sais ce qui s'est passé le jour $\aleph$ : tous les nombres réels ont été créés !

**B** : (DONT LES YEUX GICLENT DES ORBITES) Dieu ! Je crois que tu as raison !

**A** : C'est sûr, nous obtenons $\frac{1}{3}$ en prenant $X_G$ tel que :

$$X_G = \{0,01;\ 0,0101;\ 0,010101;\ 0,01010101; \cdots\}$$

en notation binaire, soit :

$$X_G = \left\{\frac{1}{4};\ \frac{5}{16};\ \frac{21}{64};\ \frac{85}{256}; \cdots\right\},$$

et $X_D$ contiendrait des nombres qui se rapprochent de plus en plus de $\frac{1}{3}$ en lui étant supérieurs, par exemple :

$$X_D = \{0,1;\ 0,011;\ 0,01011;\ 0,0101011;\ 0,010101011; \cdots\}.$$

**B :** Et un nombre tel que $\pi$ est créé de la même façon. Je ne connais pas la représentation binaire de $\pi$, mais disons que c'est :

$$\begin{aligned}\pi \quad = \quad 11,&00100\ 10000\ 11111\ 10110\ 10101\ 00010\ 00100\ 00101\ 10100\ 01100\ 00100\\ &01101\ 00110\ 00100\ 11000\ 11001\ 10001\ 01000\ 10111\ 00000\ 00110\ 11100\\ &00011\ 10011\ 01000\ 10010\ 10010\ 00000\ 10010\ 01110\ 00001\ 00010\ 00101\\ &00110\ 01111\ 10011\ 00011\ 10100\ 00000\ 01000\ 00101\ 11011\ 11101\ 01001\\ &10001\ 11011\ 00010\ 01110\ 01101\ 10010\ 00100\ 10100\ 01010\ 01010\ 00001\\ &00001\ 11100\ 11000\ 11100\ 011\ldots\end{aligned}$$

On obtient $\Pi_G$ en s'arrêtant à chaque 1 :

$$\Pi_G = \{11,001;\ 11,001001;\ 11,00100100001;\cdots\}.$$

Et $\Pi_D$ en s'arrêtant à chaque 0 et en ajoutant 1

$$\Pi_D = \{11,1;\ 11,01;\ 11,0011;\ 11,00101;\cdots\}.$$

**A :** Il y a encore de nombreux autres ensembles qui peuvent être utilisés pour $\Pi_G$ et $\Pi_D$. En fait une infinité. Mais ils produisent tous des nombres semblables à $\Pi$, car c'est le premier nombre créé entre $\Pi_G$ et $\Pi_D$.

**B :** (LA SERRANT TENDREMENT DANS SES BRAS) Donc, c'est *ça* que la Pierre de Conway voulait dire quand elle dit que l'univers a été créé le jour $\aleph$ : les nombres réels sont l'univers.

Tu as déjà entendu parlé de la théorie du "Big Bang" en cosmologie ? Et bien, c'est ça le jour $\aleph$ : Bang !

**A :** (NE L'ÉCOUTANT PAS) Bill, il y a un autre nombre qui a aussi été créé le jour $\aleph$, un nombre qui n'est pas dans le système des nombres réels. Prenons $X_D$ vide et $X_G = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ce nombre est supérieur à *tous* les autres nombres !

**B :** L'infini—l'illimité !

**A :** Je crois que je le noterai par la lettre Grecque $\omega$ car j'ai toujours aimé cette lettre. Moins l'infini a été aussi créé, soit $-\omega$.

**B :** Le jour $\aleph$ était un jour de dur boulot !

**A :** Et maintenant, le jour *suivant*.

**B :** Quoi ! Tu veux dire que le jour $\aleph$ n'est pas le dernier !

**A :** Oh non ! Pourquoi Conway se serait-il arrêté la ? J'ai comme le sentiment qu'il venait à peine de commencer. Le processus n'a pas de fin, car on peut toujours prendre $X_D$ vide, et pour $X_G$ l'ensemble des nombres déjà créés.

**B :** Mais il n'y a pas grand chose d'autre à *faire* après le jour $\aleph$, puisque les nombres réels sont si denses. La partie non-infinie de l'univers est désormais créée puisqu'il n'y a plus de place pour mettre des nombres entre deux nombres réels "adjacents".

**A :** Non, Bill. C'est ce que *moi* je croyais aussi, jusqu'à ce que tu le dises toi-même. Je suppose que cela prouve simplement que j'aime te contredire. Voilà, on n'a qu'à prendre $X_G = \{0\}$, et $X_D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. C'est un nombre *plus grand* que zéro et *plus petit* que tous les réels positifs ! Appelons le $\epsilon$.

**B :** (DÉFAILLANT) Ulp.. Ok, ça va. Mais là c'est vraiment *trop* ! Il doit bien y avoir une limite.

Ce qui me surprend le plus, c'est que ton nombre $\epsilon$ a été crée le jour $\aleph$ et *non* le jour d'après. Tu aurais pu prendre $X_D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$ . Il y a encore des tas de nombres dingues créés le même jour comme :

$$\left(\{1\}, \left\{1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}, \ldots\right\}\right)$$

qui est juste un cheveu au-dessus de 1.

Et je suppose que pour tout nombre, il doit y avoir un nombre juste plus grand... Comme $\pi$... Non, ça ne peut pas coller...

**A :** Celui qui est juste au dessus de $\pi$ n'apparaît que le lendemain du jour $\aleph$. Seuls les nombres qui se terminent en binaire ont un voisin infiniment proche le jour $\aleph$.

**B :** Le jour suivant le jour $\aleph$, nous aurons aussi un nombre juste *entre* 0 et $\epsilon$. Et tu penses que Conway ne fait que commencer ?...

**A :** Ce qui est super, Bill, c'est qu'on n'a pas seulement les nombres réels, et l'infini, et tous les proches voisins. On a aussi des règles pour nous dire lequel des deux nombres est le plus grand, et des lois pour les *additionner* et les *soustraire.*

**B :** C'est *juste* ! Nous avons prouvé toutes ces règles, en pensant qu'on les *connaissait* déjà... c'était juste un jeu de dériver des lois de Conway toutes les vieilles propriétés de l'arithmétique. Mais maintenant, nous voyons que nos preuves s'appliquent aussi à une infinité de cas inconnus ! Les nombres ne sont limités que par notre imagination, et notre conscience s'étend à l'infini, et...

**A :** Tu sais, tout ceci est un peu comme une expérience religieuse pour moi. Je commence à avoir une meilleure appréhension de Dieu. Il est partout...

**B :** Même entre les nombre réels ?

**A :** Ta gueule ! Je suis sérieux !

## 15 L'Infini

**B :** J'ai fait quelque calculs avec l'infini. Ainsi, la règle (3) nous donne immédiatement :

$$\omega + 1 = (\{\omega, 2, 3, 4, \ldots\}, \emptyset)$$

qui se simplifie en :

$$\omega + 1 \equiv (\{\omega\}, \emptyset).$$

**A :** Il a été créé le lendemain du jour $\aleph$.

**B :** Ouaip, et :

$$\omega + 2 \equiv (\{\omega + 1\}, \emptyset).$$

**A :** Et $\omega - 1$ ?

**B :** $\omega - 1$ ? Je n'ai jamais songé à soustraire quelque chose de l'infini, parce qu'un nombre qui est inférieur à l'infini est supposé être fini. Utilisons les lois que nous connaissons pour voir ce qui se passe… Regarde ça :

$$\omega - 1 = (\{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \{\omega\}).$$

Bien sûr ! C'est le premier nombre créé qui est plus grand que tous les entiers, et cependant plus petit que $\omega$.

**A :** Donc, c'est *ça* dont parlait la Pierre, quand elle parlait d'un nombre infini plus petit que l'infini.

Bon, j'ai autre chose pour toi : Qu'est ce que $\omega + \pi$ ?

**B :** C'est facile :

$$\omega + \pi \equiv (\omega + \Pi_G, \omega + \Pi_D)\,.$$

Ceci a été créé le… $(2\aleph)^{\text{ième}}$ jour ! Ainsi que $\omega + \epsilon$ et $\omega - \epsilon$.

**A :** Oho ! Alors, il doit y avoir aussi un nombre $2\omega$. C'est à dire $\omega + \omega$ .

**B :** Ouaip !

$$\omega + \omega = (\{\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\}, \emptyset).$$

Je suppose qu'on peut l'appeler $2\omega$ bien que nous n'ayons pas encore de multiplication. On pourra certainement prouver plus tard que : $(x+y)z \equiv xz + yz$. Soit que $2z = (1 + 1)z \equiv 1z + 1z = z + z$.

**A :** Juste, et :

$$3\omega = (\{2\omega + 1, 2\omega + 2, 2\omega + 3, \ldots\}, \emptyset)$$

qui sera créé le jour $3\aleph$, etc.

**B :** Nous ne savons encore rien de la multiplication, mais je parie que $\omega$ fois $\omega$ s'avérera être :

$$\omega^2 \equiv (\{\omega, 2\omega, 3\omega, \dots\}, \emptyset).$$

**A :** Créé le jour $\aleph^2$. Imagine seulement ce que Conway peut faire aux petits nombres pendant ce temps.

**B :** Tu sais, Alice, ça me rappelle un concours qu'on faisait à l'école quand j'étais gosse. Chaque fois, on essayait de savoir qui connaissait le nombre le plus grand. Un jour, un de mes copains a déclaré que son père lui avait dit que l'infini était le plus grand des nombres. Mais j'en ai alors trouvé un plus grand en disant "l'infini plus un". Le jour suivant, on se disputait à coups d'infini plus infini, et bientôt l'infini fois l'infini.

**A :** Et qu'arriva-t-il ?

**B :** En bien, quand on s'est mis à répéter "l'infini fois l'infini fois l'infini fois l'infini ..." autant qu'on pouvait sans respirer, on a plus ou moins abandonné le concours.

**A :** Mais il y a encore plein de nombres à trouver. Regarde :

$$\omega^\omega \equiv \left(\left\{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \dots\right\}, \emptyset\right).$$

Et nous ne sommes qu'au début.

**B :** Tu veux dire qu'il y a $\omega^{\omega^\omega}$, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$ , et la limite de cette suite, etc... Pourquoi n'ai je jamais songé à ça étant gosse ?

**A :** C'est une perspective complètement différent..., mais je crains que nos preuves ne soient plus trop correctes désormais.

**B :** Quoi ? Encore ? On les a déjà établies correctement.

Oh, oh, je vois ce que tu veux dire... la somme des jours.

**A :** Oui, on ne peut plus travailler par récurrence sur la somme des jours car elle devient infinie.

**B :** Peut-être que nos théorèmes ne marchent même pas dans le cas infini... C'est sûr, ça serait chouette, si ça marchait. Je veux dire, quel pied de prouver des trucs concernant des nombres auxquels on n'aurait jamais songé.

**A :** Nous n'avons pas vraiment de problèmes pour nos calculs sur les nombres infinis. Laisse moi réfléchir un moment.

. . . . . . . . . . .

C'est bon. Je crois que finalement ça marche au poil. On n'a pas besoin de la "somme des jours".

**B :** Comment fais-tu ?

**A :** Eh bien, rappelle toi comment nous avons songé la première fois à la récurrence avec "les mauvais nombres". Ce que nous voulons montrer, c'est que si un théorème ne marche pas pour $x$, alors il ne marche pas non plus pour un élément $x_G$ de $X_G$ ou pour un élément $x_D$ de $X_D$. De même, pour un $x_{G_G}$ ou $x_{G_D}$ ou $x_{D_G}$ ou $x_{D_D}$, et ainsi de suite. Mais il faut que ce procédé soit fini. Si on peut atteindre le cas de l'ensemble $X_{G_{G_{G\cdots_G}}}$ vide, et pour lequel le théorème marche forcément, alors on en déduit que $x$ ne peut être un contre exemple.

**B :** (SIFFLANT) Je vois ! Par exemple, pour prouver (T10), soit $x + 0 = x$, on a $x_G + 0 = x_G$ pour tout $x_G$ de $X_G$. Si on ne peut pas supposer ça, alors il existe un $x_{G_G}$ de $X_{G_G}$ tel que $x_{G_G} + 0$ n'est pas égal à $x_{G_G}$. Ou alors il existe un $x_{G_D}$ tel que $x_{G_D} + 0 \neq x_{G_D}$. Donc, un contre exemple implique une suite infinie d'ancêtres qui sont aussi des contre exemples.

**A :** Tout ce que nous reste à montrer, c'est qu'il n'existe pas de séquence d'ancêtres *infinie* :

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots$$

telle que $x_{i+1} \in X_{i_G} \cup X_{i_D}$.

**B :** C'est une bonne méthode.

**A :** Aussi, c'est vrai, car tout nombre (en fait tout pseudo-nombre) est créé à partir de ceux *déjà créés*. Donc, chaque fois qu'on créé un nombre, on peut montrer qu'il n'existe pas de chaîne infinie d'ancêtres qui commence avec $x_1 = x$, parce qu'on a montré déjà avant qu'il ne pourrait y avoir de chaîne d'ancêtres pour tout $x_2$ de $X_G$ ou de $X_D$.

**B :** C'est logique, et c'est beau... Mais il me semble que tu prouves la validité de la récurrence par la récurrence.

**A :** Je crois que tu as raison. Ceci doit être en fait en quelque sorte un axiome. Il formalise la notion intuitive de "créé précédemment" sur laquelle nous sommes passés rapidement pour la loi (1). Oui, c'est ça, la loi (1) aura des bases solides si nous la formulons ainsi.

**B :** Ce que tu dis ne couvre que le cas d'une seule variable. Notre démonstration sur la somme des nombres a été utilisée pour deux, trois, même quatre variables, où la récurrence pour $(x, y, z)$ relie des choses comme $(y, z, x_G)$ etc.

**A :** Exactement. Mais dans tous les cas la récurrence revient à une *permutation* des variables, avec au moins une d'elles qui gagne un indice $G$ ou $D$ en plus. La récurrence à trois variables revient à dire qu'il ne peut y avoir de chaîne infinie d'ancêtres, comme par exemple :

$$(x, y, z) \to (y, z, x_G) \to (z_D, y, x_G) \to \cdots$$

En effet, ça voudrait dire qu'au moins une des trois variables possède une chaîne d'ancêtres infinie, ce qui est contraire à la règle (1).

**B :** (L'ENLAÇANT ET L'EMBRASSANT PARTOUT) Alice, je t'aime mon amour ! Je t'idolâtre.

**A :** (RIGOLANT) "Et comment t'aimerais-je" ? Voyons : Un peu, beaucoup, à la folie, $\omega$, $\omega^2$, $\omega^\omega$, $\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$, ....

**B :** Il me semble que nous avons étudié la construction de l'infini avec suspicion et ruse. Bien que je ne remarque rien de faux dans ta démonstration, je reste sur mes gardes.

**A :** Je pense que la différence est entre la preuve et le calcul. Il n'y a pas de différence essentielle entre des deux pour les ensembles finis, quand nous parlions de nombres créés avant le jour $\aleph$. Mais maintenant, il y a une distinction réelle à faire entre la preuve et la capacité de faire les calculs. On sait que les séquences infinies d'ancêtres ne peuvent pas exister, mais elles peuvent être arbitrairement grandes, même quand elle commencent par le même nombre. Par exemple,

$$\omega, n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0$$

est une séquence d'ancêtres pour $\omega$, pour tout $n$.

**B :** C'est juste. Je réfléchissais justement aux séquences d'ancêtres de $\omega^2$. Elles sont toutes finies bien sûr, mais peuvent être si longues, leur finitude n'est même pas évidente.

**A :** Cette finitude illimitée signifie que nous pouvons faire des preuves valables, par exemple, que $2 \times \pi \equiv \pi + \pi$, mais que nous ne pouvons pas nécessairement calculer $\pi + \pi$ en un nombre fini d'étapes. Seul Dieu peut finir les calculs. Nous pouvons finir les preuves.

**B :** Voyons, $\pi + \pi = (\pi + \Pi_G, \pi + \Pi_D)$, donc... Ok, je vois, il y a une infinité de ramifications de calcul, mais elles se terminent toutes après un nombre fini d'étapes.

**A :** Le truc bien quand on utilise cette sorte de récurrence, c'est qu'on peut l'utiliser sans jamais avoir besoin de prouver le "cas initial" séparément. Quand j'ai appris la récurrence, on devait toujours prouver $P(1)$ en premier, ou quelque chose comme ça. En fait, on a pu éviter ça.

**B :** Tu sais, je crois que je comprend pour la première fois la vraie signification de la récurrence. Et j'ai du mal à admettre le fait que tout notre théorie tient debout, de l'infini à l'infinitésimal, aussi bien que pour les nombres binaires finis.

**A :** A part peut-être (T8), qui parle du "premier nombre créé" avec telle propriété. On doit définir ce que ça veut dire désormais... Je suppose qu'on pourrait attribuer à chaque jour un nombre, comme par exemple le plus grand nombre créé ce jour là, et ordonner les jours de cette façon...

**B :** Je te suis. J'ai remarqué que le nombre qui semble être le plus grand nombre créé en jour $j$ est celui pour lequel $X_D$ est vide et $X_G$ est l'ensemble des nombres déjà existants.

**A :** Peut-être ceci explique-t-il pourquoi il y a un jour $\aleph$, un jour $(\aleph + 1)$, mais pas un jour $(\aleph - 1)$.

**B :** Ouais, je suppose. Mais tout ça est trop profond pour moi. Je voudrais bien m'atteler à la multiplication, pas toi ?

## 16 La Multiplication

**A :** Voyons cette feuille où tu as écrit la règle de Conway pour la multiplication. Il doit y avoir un moyen de l'exprimer en symboles. Hmm, nous savons déjà ce qu'il veut par "parties de même type".

**B :** Alice, c'est trop compliqué. Essayons d'inventer notre propre règle pour la multiplication, plutôt que de déchiffrer ce vieux message. Pourquoi ne pas faire comme lui pour l'addition. La quantité $xy$ doit être comprise entre $X_G y \cup xY_G$ et $X_D y \cup xY_D$. Ça doit être vrai au moins si on exclue les nombres négatifs.

**A :** Mais cette définition serait identique à celle de l'addition, donc le produit $xy$ serait la même chose que la somme $x + y$.

**B :** Je vois. Tu as raison. D'accord, je veux bien regarder la solution de Conway. Voyons voir cette feuille.

**A :** Ne t'en fais pas, c'est la meilleure attitude à avoir. Souviens toi de ce qu'on disait ? Il faut toujours commencer par essayer quelque chose.

**B :** Cette leçon là au moins, on l'a retenue.

**A :** Tout ce que j'arrive à voir, c'est que Conway choisit l'ensemble de gauche de $xy$ comme étant tous les nombres de la forme :

$$x_G y + xy_G - x_G y_G \text{ ou } x_D y + xy_D - x_D y_D.$$

(6) Et l'ensemble de droite contient tous les nombres de la forme :

$$x_G y + xy_D - x_G y_D \text{ ou } x_D y + xy_G - x_D y_G.$$

Tu vois, l'ensemble de gauche comprend les "même types" et l'ensemble de droite les "types opposés" de parties. Qu'est-ce que tu penses de cette définition ?

**B :** Fais moi voir, ça a l'air bizarre. Voyons $xy$ doit être supérieur à sa partie de gauche. Avons-nous

$$xy > x_G y + xy_G - x_G y_G \text{ ?}$$

C'est comme… Oui, ça doit être :

$$(x - x_G)(y - y_G) > 0.$$

**A** : On y est. Le produit de nombres positifs doit être positif ! Les trois autres conditions qui disent que $xy$ doit être compris entre ses ensembles de gauche et de droite disent avant tout que :

$$\begin{aligned}(x_D - x)(y_D - y) &> 0\\ (x - x_G)(y_D - y) &> 0\\ (x_D - x)(y - y_G) &> 0.\end{aligned}$$

Bon, cette définition est plausible, même si nous n'avons rien prouvé.

**B** : Avant d'aller plus loin en essayant de démontrer les principales propriétés de la multiplication, je veux vérifier quelque cas simples juste pour voir. Voyons...

(T20) $\quad xy = yx.$
(T21) $\quad 0y = 0.$
(T22) $\quad 1y = y.$

C'était très facile.

**A** : Bien, zéro fois l'infini donne zéro. Un autre résultat simple, c'est que :

(T23) $\quad -(xy) = (-x)y.$

**B** : Juste. Regarde, celui là est marrant :

(T24) $\quad \frac{1}{2}x \equiv \left(\frac{1}{2}X_G \cup \left(x - \frac{1}{2}X_D\right), \left(x - \frac{1}{2}X_G\right) \cup \frac{1}{2}X_D\right).$

**A** : Hé, je me suis toujours demandée ce que *la moitié de l'infini* valait.

**B** : La moitié de l'infini !... Juste une seconde.

$$\frac{1}{2}\omega \equiv (\{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \{\omega - 1, \omega - 2, \omega - 3, \omega - 4, \ldots\}).$$

C'est intéressant de montrer que $\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega \equiv \omega$... Ouais ! En voilà un super !

$$\epsilon\omega \equiv 1.$$

Notre nombre infinitésimal se trouve être la réciproque de l'infini.

**A** : Pendant que tu planchais là-dessus, je regardais la multiplication en général. Ça a l'air assez bizarre pour les pseudo-nombres. J'ai trouvé un pseudo-nombre $p$ pour lequel $(\{1\}, \emptyset)p$ n'est pas similaire à $(\{0, 1\}, \emptyset)p$, même si $(\{1\}, \emptyset)$ et $(\{0, 1\}, \emptyset)$ sont tous les deux similaire à 2. Malgré cette difficulté, j'ai appliqué ta méthode du Grand Tableau, et je pense qu'il est possible de montrer que :

(T25) $\quad x(y + z) \equiv xy + xz$, et
(T26) $\quad x(yz) \equiv (xy)z$

pour des pseudo-nombres quelconques, et

$$\text{(T27)} \qquad \text{Si } x > x' \text{ et } y > y',\ \text{alors } (x - x')(y - y') > 0$$

pour des pseudo-nombres quelconques. Il s'ensuit que $xy$ est un nombre quand $x$ et $y$ sont des nombres.

**B** : On peut utiliser le théorème ($T27$) pour montrer que :

$$\text{(T28)} \qquad \text{Si } x \equiv y,\ \text{alors } xz \equiv yz.$$

pour tout nombre. Donc, tous les calculs que nous avons fait sont parfaitement rigoureux.

Je pense qu'avec ça, on a fait le tour de tout ce qu'il y a sur la Pierre. Excepté la vague référence aux "séries, quotients, et racines."

**A** : Hmm... Et la division ? Je parie que si $x$ est compris entre 0 et 1, ça doit être possible de montrer que :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1+x} \quad \equiv \quad & \big(\{x - x^2, x - x^2 + x^3 - x^4, \}\ , \\ & \{x, x - x^2 + x^3, x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5, \ldots\}\big)\,. \end{aligned}$$

Pour le moins, c'est comme ça que l'on a obtenu $\frac{1}{3}$ pour $x = \frac{1}{2}$. Peut-être que l'on pourra montrer que tout nombre non nul a un inverse, en utilisant cette méthode.

**B** : Alice ! Vise moi un peu ça !

$$\begin{aligned} \sqrt{\omega} \quad & \equiv \quad \left(\{1, 2, 3, 4, \ldots\}\,, \left\{\frac{\omega}{1}, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{4}, \ldots\right\}\right) \\ \sqrt{\epsilon} \quad & \equiv \quad \left(\{\epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, 4\epsilon, \ldots\}\,, \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}\right). \end{aligned}$$

**A** : (TOMBANT DANS SES BRAS) Bill ! Chacune de ces découvertes nous conduit de plus en plus loin !

**B** : (REGARDANT LE COUCHER DU SOLEIL) Il y a pourtant une infinité de choses à faire... et seulement un temps limité...

. . . . . . . . . . .

Fin

Le lecteur a sans doute deviné qu'il ne s'agit pas d'une histoire vraie. Pourtant, "J. H. W. H. Conway" existe vraiment—c'est le professeur John Horton Conway de Princeton University aux Etats-Unis. Le vrai Conway a établi de nombreux résultats remarquables à propos de ces nombres "extraordinaux", qui s'ajoutent à ceux mentionnés ici. Par exemple, tout polynôme de degré impair à coefficients quelconques parmi les nombres surréels, a au moins une racine. De plus, tout pseudo-nombre $p$ correspond à une position dans un jeu à deux joueurs "Gauche" et "Droite". Les quatre relations :

$$\begin{array}{cc} p > 0, & p < 0, \\ p \equiv 0, & p \parallel 0, \end{array}$$

(où $p \parallel 0$ signifie que $p$ et 0 ne sont pas en relation) correspondent respectivement aux situations suivantes :

| | |
|---|---|
| Gauche gagne, | Droite gagne, |
| Le second joueur gagne, | Le premier joueur gagne, |

ceci à partir de la position $p$. Voir son livre incroyable *On Numbers and Games* publié chez Academic Press en 1976. La théorie n'en est encore qu'à ses débuts, et le lecteur pourra se prendre d'intérêt pour les nombreuses questions inexplorées : Que peut-on dire des logarithmes ? de la continuité ? des propriétés de la multiplication des pseudo-nombres ? de la résolution des équations Diophantine généralisées ?

# Sommaire des Règles et des Théorèmes

## Règles

**(1)** $x = (X_G, X_D)$ où $X_G \not\geq X_D$.

**(2)** $x \leq y$ signifie que $X_G \not\geq y$ et $x \not\geq Y_D$.

**(3)** $x + y = ((X_G + y) \cup (Y_G + x), (Y_D + x) \cup (X_D + y))$.

**(4)** $-x = (-X_D, -X_G)$.

**(5)** $x - y = x + (-y)$.

**(6)** $xy = z$ où

$$Z_G = \{x_G y + x y_G - x_G y_G, x_D y + x y_D - x_D y_D\}$$

et

$$Z_D = \{x_G y + x y_D - x_G y_D, x_D y + x y_G - x_D y_G\}.$$

. . . . . . . . . . .

## Théorèmes

**(T1)** (Théorème d'Alice) Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.

**(T2)** Soit $x$ un nombre. $X_G \leq x$ et $x \leq X_D$.

**(T3)** $x \leq x$.

**(T4)** Soient $x$ et $y$ des nombres. Si $x \not\leq y$, alors $y \leq x$.

**(T5)** Si $x < y$ et $y \leq z$, alors $x < z$.

**(T6)** Si $x \leq y$ et $y < z$, alors $x < z$.

**(T7)** Soit $x$ un nombre. Si $Y_G < x < Y_D$, alors $x \equiv (Y_G \cup X_G, Y_D \cup X_D)$.

**(T8)** Soit $y$ un nombre. Si $x$ est le premier nombre créé tel que : $Y_G < x$ et $x < Y_D$, alors $x \equiv y$.

**(T9)** $x + y = y + x$.

**(T10)** $x + 0 = x$.

**(T11)** $(x+y)+z=x+(y+z)$.

**(T12)** Si $x \equiv y$, alors $x+z \equiv y+z$.

**(T13)** Si $x \leq y$, alors $x+z \leq y+z$.

**(T14)** Si $x+z \leq y+z$, alors $x \leq y$.

**(T15)** $x-x \equiv 0$.

**(T16)** $-(-x)=x$.

**(T17)** $(x+y)-y \equiv x$.

**(T18)** $-(x+y)=(-x)+(-y)$.

**(T19)** Si $x \leq y$, alors $-y \leq -x$.

**(T20)** $xy=yx$.

**(T21)** $0y=0$.

**(T22)** $1y=y$.

**(T23)** $-(xy)=(-x)y$.

**(T24)** $\frac{1}{2}x \equiv \left(\frac{1}{2}X_G \cup \left(x-\frac{1}{2}X_D\right), \left(x-\frac{1}{2}X_G\right) \cup \frac{1}{2}X_D\right)$.

**(T25)** $x(y+z) \equiv xy+xz$.

**(T26)** $x(yz) \equiv (xy)z$.

**(T27)** Si $x>x'$ et $y>y'$, alors $(x-x')(y-y')>0$.

**(T28)** Si $x \equiv y$, alors $xz \equiv yz$.

# Épilogue

Alfréd Rényi, mathématicien hongrois, composa trois “dialogues mathématiques” particulièrement riches qui furent publiés en 1967 par Holden-Day à San Francisco. Son premier dialogue, qui se tient dans la Grèce antique vers 440 ans avant J.C., met en scène Socrate, et décrit magnifiquement la nature des mathématiques. Le deuxième qui a lieu en 212 ans avant J.C., présente une superbe *réflexion* d'Archimède sur les applications des mathématiques. Le troisième dialogue de Rényi porte sur les mathématiques et la science. Galilée nous y parle depuis l'an 1600.

J'ai écrit *Surreal Numbers”* à la façon d'un dialogue mathématique se tenant dans les années 70, en mettant l'accent sur la nature des explorations mathématiques. Je l'ai écrit avant tout en m'amusant et j'espère que mes lecteurs y trouveront également du plaisir. Je dois cependant admettre que j'avais aussi une idée sérieuse derrière la tête. Je voulais en effet construire des éléments capables de combler une des lacunes les plus graves de notre système d'éducation actuel, à savoir le manque d'entraînement à la recherche. Les *étudiants* n'ont quasiment jamais l'occasion de voir comment les mathématiques sont inventées, ceci jusqu'à leur troisième cycle d'études.

J'ai pensé qu'on ne pouvait pas enseigner la créativité avec un manuel de cours, et qu'un “anti-manuel” comme ce roman serait utile. Je me suis efforcé d'écrire quelque chose de totalement opposé à *Grundlagen der Analysis* de Landau. J'ai voulu montrer comment l'on peut sortir les mathématiques de la classe et les amener dans la vie. J'ai voulu pousser le lecteur à mettre la main à la pâte en explorant lui-même des idées mathématiques abstraites.

La meilleure façon de transmettre les techniques de la recherche mathématique est probablement de développer un exemple précis. La récente approche de Conway des nombres surréels m'est apparue d'emblée comme la voie idéale pour illustrer les aspects importants de la recherche mathématique. C'est en effet une théorie riche, pratiquement autonome, mais étroitement liée à l'algèbre et l'analyse, et qui est encore peu explorée.

En d'autres mots, mon but principal n'est pas d'enseigner la théorie de Conway, mais plutôt comment l'on peut arriver à développer une telle théorie. Alors que les deux personnages du livre explorent peu à peu et construisent le système des nombres de Conway, j'ai pris soin de noter aussi bien leurs faux départs et frustrations que leurs bonnes idées.

J'ai voulu peindre un portrait aussi fidèle que possible des principes importants, des joies, des passions, de la philosophie des mathématiques. J'ai donc écrit l'histoire en faisant moi-même de la recherche (en n'utilisant d'autre sources que le vague souvenir d'une conversation lors d'un déjeuner avec John Conway presque un an auparavant). Ce livre est destiné aux étudiants en mathématiques du niveau DEUG ou licence . Il peut probablement être utilisé dans le cadre d'un cursus mathématique classique soit :

1. en complément d'information dans un module d'"Introduction aux Mathématiques Abstraites" ou de "Logique Mathématique", ou
2. comme manuel de cours principal dans un séminaire de premier cycle destiné à développer l'autonomie de travail des étudiants.

Les livres utilisés en classes sont généralement complétés par des exercices. Au risque de *détruire* la pureté de l'approche "romanesque", j'ai réuni quelques suggestions de problèmes supplémentaires. Dans le cadre d'un séminaire, ces exercices devront être proposés au début de l'heure, et susciter des discussions de classe, au lieu de donner lieu à des devoirs à la maison.

## Exercices

1. Après le chapitre 3. En quoi consiste l'"Abstraction" ? La "Généralisation" ?
2. Après le chapitre 5. Soit $g$ une fonction des nombres vers les nombres croissants (tel que $x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$). Déterminez

   $$f(x) = (f(X_G) \cup \{g(x)\}, f(x_D))\,.$$

   Montrez que $f(x) \leq f(y)$ si et seulement si $x \leq y$. Dans le cas où $g(x)$ est identiquement nulle, évaluez $f(x)$ pour le plus de nombres possible. [*Remarque* : Après le chapitre 12, cet exercice *reste valable* en remplaçant "nombres" par "pseudo-nombres".]
3. Après le chapitre 5. Soient $x$ et $y$ des nombres dont les ensembles de gauche et de droite sont similaires, sans être identiques. Formellement, soient :

   $$\begin{array}{llcll} f_G & : X_G \to Y_G, & & f_D & : X_D \to Y_D, \\ g_G & : Y_G \to X_G, & \text{et} & g_D & : Y_D \to X_G \end{array}$$

   des fonctions telles que $f_G(x_G) \equiv x_G$, $f_D(x_D \equiv x_D$, $g_G(y_G) \equiv y_G$ et $g_D(y_D \equiv y_D$. Montrez que $x \equiv y$. (Alice et Bill ne se sont pas aperçu que ce lemme est important lors de certaines de leurs recherches, ils l'ont admis sans démonstration.) Le lemme reste valable pour les pseudo-nombres.

4. Après le chapitre 6. Quand nous développons la théorie des nombres de Conway à partir des quelques axiomes de départ, est-il possible d'utiliser les propriétés que nous "connaissons" déjà des nombres dans les démonstrations ? (L'utilisation, par exemple, d'indices $i - 1$ et $j + 1$ ...) [*Attention* : Ceci conduira sans doute à une discussion méta-mathématique auquel l'instructeur devra être préparé.]

5. Après le chapitre 9. Trouvez une démonstration rigoureuse du schéma général au bout de $n$ jours. [Ceci est très formateur en matière de choix de notation. Les étudiants devront s'efforcer de trouver une notation qui rende la démonstration rigoureuse, la plus compréhensible possible (au sens où cette notation coïncide avec le raisonnement intuitif d'Alice et Bill).]

6. Après le chapitre 9. Peut-on écrire une formule simple donnant le jour où un nombre binaire donné a été créé ?

7. Après le chapitre 10. Montrez que $x \equiv y \Rightarrow -x \equiv -y$.

8. Après le chapitre 12. Calculez la valeur de $x \oplus y$ pour autant de $x$ et $y$ que vous le pouvez.

9. Après le chapitre 12. Modifiez les règles (1) et (2) en remplaçant $\not\geq$ par $<$ à chacun des trois endroits où cela apparaît. Ajouter la nouvelle règle :

   $$(2') \qquad x < y \quad \text{si et seulement si} \quad x \leq y \text{ et } y \not\leq x.$$

   Développez à nouveau la théorie des nombres de Conway en utilisant ces définitions. [Ceci permet une bonne révision des premiers chapitres. Il faut changer les arguments dans plusieurs endroits. Le point le plus délicat est de montrer que $x \leq x$ pour tous les nombres. Il existe une démonstration assez courte, pas facile à découvrir, mais que je préfère ne pas révéler ici. On encouragera les étudiants à découvrir que la nouvelle relation $<$ n'est pas identique à celle de Conway en ce qui concerne les pseudo-nombres (même si cela revient au même pour tous les nombres). Avec ces nouvelles définitions, $x \leq x$ n'est pas toujours vraie. Pour $x = (\{(\{0\}, \{0\})\}, \emptyset)$, on a $x \equiv 0$ dans le système de Conway et $x \equiv 1$ dans le nouveau système ! Les définitions de Conway entraînent des propriétés plus classiques. La nouvelle relation est cependant très instructive.]

10. Après le chapitre 13. Montrez comment "contourner le cercle vicieux" d'Alice et Bill en éliminant $\mathbf{III}(z, z_G, y)$ et $\mathbf{III}(z_D, z, x)$ des conditions nécessaires à la démonstration de $\mathbf{II}(x, y, z)$. Montrez, en d'autres mots, directement que pour tout $z_G$ l'on ne peut pas avoir $z + y \leq z_G + y$.

11. Après le chapitre 14. Déterminez les "voisins immédiats" de chaque nombre réel les quelques jours qui suivent le jour $\aleph$.

12. Après le chapitre 15. Construisez les plus grands nombres infinis que vous pouvez. Même question pour les plus petits infinitésimaux positifs.

13. Après le chapitre 15. Suffit-il de restreindre $X_G$ et $X_D$ aux ensembles dénombrables pour trouver tous les nombres surréels ? [Cette question est difficile. Elle donnera probablement lieu à une discussion intéressante. L'instructeur devra se préparer à plonger dans les nombres ordinaux.]

14. Presque n'importe quand. On définit l'opération $\circ$ par

$$x \circ y = (X_G \cap Y_G, X_D \cup Y_D)\,.$$

[La classe devra découvrir qu'il ne s'agit *pas* de $\min(x, y)$ ! On pourra explorer beaucoup d'autres opérations, par exemple lorsque $x \circ y$ est défini par

$$(X_G \circ Y_G, X_D \cup Y_D)$$

ou

$$((X_G \circ y) \cup (x \circ Y_G), X_G \circ Y_D)$$

etc.]

15. Après le chapitre 16. Si $X$ est l'ensemble de *tous* les nombres, montrez que $(X, \emptyset)$ n'est similaire à *aucun* nombre. [La théorie des ensembles contient des paradoxes si on n'y prend pas garde. Au sens strict, la classe de tous les nombres n'est pas un ensemble. *cf :* le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles.]

16. Après le chapitre 16. On dit que $x$ est un *entier généralisé* si et seulement si

$$x \equiv (\{x-1\}, \{x+1\}).$$

Montrez que l'addition, la soustraction, et la multiplication d'entiers généralisés donne encore un entier généralisé. Les entiers généralisés comprennent les nombres classiques $n$, mais aussi les nombres $\omega \pm n$, $\frac{\omega}{2}$, etc... [Cet exercice est dû à Simon Norton.]

17. Après le chapitre 16. On dit que $x$ est un *nombre réel* si et seulement s'il existe un entier $n$ (non généralisé) tel que $-n < x < n$ et d'autre part

$$x \equiv \left(\left\{x-1, x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{4}, \dots\right\}, \left\{x+1, x+\frac{1}{2}, x+\frac{1}{4}, \dots\right\}\right).$$

Montrez que l'addition, la soustraction, et la multiplication de nombres réels donnent encore un nombre réel. Montrez que les nombres réels (nouvellement définis) sont isomorphes aux nombres réels définis de façon plus classique. [Cet exercice et ceux qui suivent sont suggérés par John Conway.]

18. Après le chapitre 16. Modifiez la règle (1) de la façon suivante. $(X_G, X_D$ est un nombre si et seulement si $X_G \not\geq X_D$ (comme précédemment) et de plus :

$$\left\{\begin{matrix}X_G \text{ a un plus grand} \\ \text{élément (ou est vide)}\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}X_D \text{ a un plus petit élément} \\ \text{(ou est vide)}\end{matrix}\right\}.$$

Montrer que l'on crée très précisément les nombres réels (ni plus, ni moins) par cette méthode.

19. Après le chapitre 16. Trouvez un pseudo-nombre $p$ tel que $p+p \equiv (\{0\}, \{0\})$. [C'est étonnamment difficile et cela conduit à des sous-problèmes intéressants.]

20. Après le chapitre 15 ou 16. Le pseudo-nombre $(\{0\}, \{(\{0\}, \{0\})\})$ est $> 0$ et $< x$ pour tous les nombres positifs $x$. C'est *vraiment* un infinitésimal ! $(\{0\}, \{(\{0\}, \{-1\})\})$ est encore plus petit. De plus, tout pseudo-nombre $p > 0$ est $> (\{0\}, \{(\{0\}, \{-x\})\})$ pour un nombre $x$ suffisamment grand.

21. Après le chapitre 16. On définit pour tout nombre $x$ :

$$\begin{aligned}\omega^x \quad = \quad & \left(\{0\} \cup \left\{ n\omega^{x_G} \,\middle|\, x_G \in X_G, n = 1, 2, 3, \dots \right\}, \right. \\ & \left. \left\{ \frac{1}{2^n}\omega^{x_D} \,\middle|\, x_D \in X_D, n = 1, 2, 3, \dots \right\} \right).\end{aligned}$$

Montrez que $w^x w^y \equiv w^{x+y}$.

22. Après le chapitre 16. Explorer les propriétés des *pseudo-nombres symétriques* $S$ définis par

$$(P_G, P_D) \in S \qquad \text{si et seulement si} \qquad P_G = P_D \subseteq< S,$$

en d'autres mots, les éléments de $S$ ont des ensembles de gauche et de droite identiques, tous les éléments de ces ensembles, etc... Montrer que l'addition, la soustraction, et la multiplication de pseudo-nombres symétriques donne encore un pseudo-nombre symétrique. Explorer plus avant les propriétés de $S$. (Combien, par exemple, d'éléments non similaires de $S$ sont créés chaque jour ? Leur arithmétique présente-t-elle un intérêt ?) [Ce problème ouvert est probablement le plus intéressant de toute cette liste car il cache une théorie particulièrement riche.]

J'enverrai des indices pour les exercices 9, 19, et 22 à tous les professeurs qui en feront la demande en m'écrivant à l'Université de Stanford.[1] Je souhaite maintenant clore cet épilogue par quelques suggestions aux professeurs qui dirigeront

[1]NDT : Vous pouvez également écrire au traducteur à l'Université de Bordeaux.

un séminaire basé sur ce livre. (Pour tous les autres, arrêtez s'il vous plaît de lire, et fermez ce livre immédiatement.[2])

Cher professeur : Beaucoup de sujets de discussion sont implicites dans l'histoire. Les premiers chapitres ne prennent pas beaucoup de temps. Mais très vite, vous ne pourrez plus couvrir un chapitre dans l'heure. Ce peut être une bonne idée de parcourir dans un premier temps l'ensemble du livre très rapidement. Ce sont en effet les développements de la fin qui donnent leur intérêt au début.

Il sera bon, par ailleurs, de demander fréquemment aux étudiants de "distiller" les principes importants, et le *modus operandi* des personnages. Pourquoi abordent-ils le problème de telle ou telle façon et quels sont les avantages ou inconvénients de leurs approches. En quoi la "sagesse" d'Alice diffère-t-elle de celle de Bill ? (Leurs personnalités sont très différentes.) Les étudiants devront étudier de près certaines démonstrations dont les détails sont souvent laissés à l'imagination du lecteur. C'est la seule manière de vraiment apprendre la théorie du livre. Au mieux, les étudiants devront affronter les problèmes eux-mêmes avant de poursuivre la lecture. Les points de suspension "..." signifient généralement que les personnages sont en train de réfléchir (ou d'écrire), et le lecteur devra en faire de même.

Il serait bon, à mon avis, lors de discussions en classes sur ce type d'exercice, de limiter le nombre d'interventions par personne. Cela empêcherait les personnes loquaces de dominer et donc de ruiner la discussion. Tout le monde peut ainsi participer.[3]

Une autre recommandation est de terminer le séminaire par un devoir à la maison portant sur trois ou quatre semaines dans lequel l'étudiant devra explorer dans une composition d'une dizaine de pages un sujet non explicitement traité dans le livre. Les exercices ouverts de la liste ci-dessus illustrent quelques sujets possibles. Les étudiants pourront se grouper par deux pour leurs recherches. Il sera bon, par ailleurs de préciser aux étudiants que leurs notes dépendront non seulement du contenu mathématique, mais aussi de leur style d'expression française, selon un rapport de 50–50. On attirera leur attention sur le fait qu'un essai de fin de trimestre ne ressemble en *rien* à un devoir à la maison régulier. Ce dernier est une succession de faits en forme de tableau, sans explications, que le correcteur doit admettre comme démonstration. Le premier est complètement rédigé à la façon des bouquins de maths. Une autre façon d'habituer les étudiants à rédiger est de leurs demander de préparer à tour de rôle, des résumés des développements faits en cours. Ce système permet à tous les autres étudiants

[2]NDT : Sauter plutôt à la note du traducteur, page suivante.

[3]NDT : Il sera néanmoins bon de partager la classe afin de permettre aux élèves les plus timides de s'exprimer.

de garder une trace des discussions de classe sans être obligés de prendre des notes eux-mêmes—ce qui, bien sûr, les distrait.

Les deux faiblesses, à mon sens, dans l'enseignement actuel des mathématiques sont le manque d'entraînement à la réflexion créatrice et le manque de pratique dans la rédaction technique. J'espère que ce petit livre saura contribuer à pallier à ces deux lacunes.

Donald E. Knuth
Department of Computer Science
Stanford University
Stanford, California USA 94305-2140
mai 1974

# Note du Traducteur

*Surreal Numbers* a été traduit en espagnol, allemand, tchèque, hongrois, et japonais.[4] Je remercie l'auteur Donald E. Knuth pour son autorisation et encouragement à traduire *Surreal Numbers* en français; celle-ci a été utilisée pour l'Université Mathématique que j'ai organisé durant l'été 1991 à Toulouse, France (Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace). L'ambiance de cette colonie de vacances mathématiques pour lycéens est tout à fait celle d'*Alice* et *Bill*. Le programme est une initiation au monde de la recherche mathématique (complété par une bonne dose d'éclats de rire et de soleil). Pour tout renseignement concernant le programme de cette année, écrivez moi.

Je remercie également les Editions du Choix qui m'ont encouragé à diffuser cette traduction à la communauté mathématique francophone, et Addison-Wesley pour l'autorisation de publier cette traduction.

Depuis la publication de *Surreal Numbers* en 1974, l'étude des nombres surréels a continué d'être très active. Conway a publié sa théorie dans *On Numbers and Games,* Academic Press (1976) Londres & New York. Ce travail et tout particulièrement ses applications à la théorie combinatoire des jeux a été complété par Conway et ses coauteurs Elwyn R. Berlekamp, et Richard K. Guy par le chef d'œuvre en deux volumes : *Winning Ways for your mathematical plays,* Academic Press (1982) Londres. Les auteurs le disent eux-même :

> Vous êtes conduits aux frontières de la recherche en théorie combinatoire des jeux, ... et les nombreux problèmes non résolus stimulent de nouvelles découvertes.

Plus récemment, Harry Gonshor a publié *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers,* London Mathematical Lecture Note Series **110**, Cambridge University Press (1986) Cambridge. C'est une bonne synthèse de l'état de l'art. Il est à remarquer que la définition de Gonshor est radicalement différente de celle de Conway. Gonshor considère un nombre surréel comme la donnée d'un ordinal $\alpha$ et d'une fonction des ordinaux inférieurs à $\alpha$ vers l'ensemble $\{+,-\}$. Si on pense à $+$ et $-$ en terms de “rouge” et “bleu” on peut alors représenter ces fonctions par des “tiges” dans le jeu *Hackenbush.* (cf. *On Numbers and Games* et *Winning Ways*). C'est ainsi que l'on montre l'équivalence des définitions de Conway et Gonshor.

Je recommande vivement aux professeurs souhaitant introduire leurs classes aux méthodes de Knuth, les deux livres de George Polyà : *Comment poser et résoudre un problème : Mathématiques, Physiques, Jeux, Philosophie,* (Dunod, 1965, Paris) traduit de l'anglais, par C. Mesnage, *How to Solve It* (Princeton University Press), et *La Découverte des Mathématiques,* (Dunod, 1967, Paris).

Daniel E. Loeb

[4] Certains extraits ont été publiés en hébreu dans *Math Magazine.*

Laboratoire Bordelais de
Recherche en Informatique
Université de Bordeaux I
33405 Talence FRANCE
avril 1993